La Genericità

Saggio di ontologia matematica, filosofia del linguaggio e teoria dei modelli

---

I. Prolegomeni

I.1. Il lemma

Pochi concetti matematici incarnano un rovesciamento semantico tanto radicale quanto quello che la teoria dei modelli e la topologia hanno operato sul termine *generico*. Nel linguaggio ordinario, ciò che è generico è il comune, privo di tratti distintivi, l'interscambiabile con qualsiasi altro esemplare della medesima classe: un vino generico, un prodotto generico, un personaggio generico di un racconto scadente. La genericità del parlare quotidiano è la marca dell'intercambiabilità, della povertà determinativa, dell'assenza di carattere. Eppure la matematica — e in modo particolarmente acuto la teoria degli insiemi e la teoria dei modelli del Novecento — ha elaborato una nozione tecnica di genericità che rovescia questo senso comune con una precisione sconcertante: un elemento generico, in senso matematico rigoroso, non è affatto povero di determinazioni; è al contrario quell'elemento che soddisfa *tutte* le proprietà che valgono per la quasi totalità degli elementi di una struttura, che non appartiene ad alcun insieme eccezionale, che sfugge a ogni tentativo di isolamento attraverso predicati definibili dall'interno della struttura medesima. Il generico matematico non è il banale: è l'inclassificabile.

Questa inversione non è esteriore né puramente terminologica. Essa rivela una tensione profonda nella struttura del pensiero formale, una tensione tra ciò che è *dicibile* all'interno di un sistema e ciò che, pur essendo pienamente determinato come oggetto, eccede le risorse espressive del sistema stesso. Il generico è il luogo dove la logica incontra i propri limiti interni, non per difetto dell'oggetto ma per eccesso di esso rispetto agli strumenti di cattura disponibili.

Il presente contributo si propone di seguire questa nozione attraverso i domini disparati nei quali essa ha preso forma: la topologia e il teorema di categoria di Baire, la teoria degli insiemi e la tecnica del forcing elaborata da Paul Cohen per stabilire l'indipendenza dell'ipotesi del continuo, la filosofia di Alain Badiou che ha costruito attorno all'estensione generica un'intera ontologia dell'evento e della verità, la biologia sistematica dove il *nomenclature type* linneano istituisce una tensione opposta tra il singolare e il generale, e infine la filosofia del linguaggio con il problema dei *generic*

statements — enunciati come "gli uccelli volano" o "i cani mordono" che resistono a ogni analisi quantificazionale standard. Attraverso tutti questi registri, si cercherà di isolare una struttura comune e di interrogarsi se essa costituisca una vera unità concettuale o piuttosto una famiglia di analogie superficiali.

I.2. Genealogia filosofica di un termine

Prima di entrare nel vivo dell'analisi tecnica, è utile fissare brevemente le coordinate storiche della nozione nel suo senso pre-matematico, perché esse non scompaiono nel momento in cui la matematica se ne impadronisce, ma continuano a esercitare una pressione semantica di fondo.

Il termine deriva dal latino *genus*, genere, che in Aristotele denota uno dei predicabili fondamentali: il genere è ciò che si predica di più specie, ciò che risponde alla domanda "che cosa è" un oggetto designando non la sua specie prossima ma una classe più vasta di appartenenza. Il *genus proximum* e la *differentia specifica* costituiscono insieme la definizione reale aristotelica. Il generico, in questo quadro, è il sovraordinato, l'astrazione che non cattura ancora la pienezza determinativa dell'individuo.

La tradizione medievale, elaborando la logica dei termini generali, si interrogò sulla questione degli universali: il genere ha esistenza reale o è soltanto un nome, un flatus vocis conveniente per raggruppare individui simili? La querelle tra realisti, concettualisti e nominalisti non è qui rilevante nei dettagli, ma il punto di frizione lo è: il generico, inteso come universale, è al centro di un conflitto tra la tendenza a riconoscergli una realtà propria e la resistenza a concedergli altro che uno statuto nominale. Nella matematica moderna, come si vedrà, questo conflitto riemerge in una forma tecnicamente precisa: il generico ha esistenza oggettiva solo relativamente a un modello, cioè solo in un contesto che ha già stabilito quali predicati sono disponibili per escluderlo.

Nella modernità, Kant inaugura un uso del termine che avrà conseguenze importanti: il *giudizio determinante* sussume il caso particolare sotto un universale già dato, mentre il *giudizio riflettente* risale dall'individuale al generale che deve ancora essere trovato. Il giudizio estetico, secondo la terza Critica, pretende validità universale senza poterla dimostrare mediante un concetto determinato: esso parla, per così dire, come se il generico del bello fosse raggiungibile, pur sapendo di non disporre della regola. C'è qualcosa in questa struttura — il pretendere di enunciare una proprietà che vale generalmente senza poterla ridurre a un predicato esplicito — che anticipa la struttura logica del *generic statement* di cui si occuperà il quinto capitolo del presente trattato.

I.3. La topologia di Baire e i primi formalismi

La prima formalizzazione matematica della nozione di genericità come proprietà che vale per «quasi tutti» i punti di uno spazio si deve alla topologia, e in particolare al teorema che porta il nome del matematico francese René-Louis Baire, dimostrato nella

sua tesi di dottorato del 1899. Per comprendere la portata di questo teorema occorre introdurre alcune nozioni che ne costituiscono il vocabolario tecnico.

Sia $(X, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice *raro* (o *nowhere dense*, o *nulla parte denso*) se la chiusura di A ha interno vuoto, ovvero se:

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \varnothing$$

La chiusura cl(A) è il più piccolo chiuso che contiene A; l'interno int(B) è il più grande aperto contenuto in B. Dire che $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \varnothing$ significa che nessun aperto non vuoto è contenuto nella chiusura di A, ossia che A non riesce a «riempire» alcuna regione dello spazio, neppure nella chiusura approssimata dei suoi punti. Un insieme raro è uno che rimane «sottile» anche dopo che ne abbiamo preso la chiusura.

Un sottoinsieme $M \subseteq X$ si dice *magro* (o *di prima categoria nel senso di Baire*) se è esprimibile come unione numerabile di insiemi rari:

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \text{ dove ciascun } A_n \text{ è raro.}$$

La magrezza è dunque una proprietà di piccolezza topologica: un insieme magro è una raccolta numerabile di «strati sottili», ciascuno incapace di riempire qualsiasi regione. L'antipertico dell'insieme magro è l'insieme *residuale* (o *comagro*): un sottoinsieme $G \subseteq X$ è residuale se il suo complemento $X \setminus G$ è magro, ovvero se G contiene l'intersezione di una famiglia numerabile di aperti densi. In simboli, G è residuale se e solo se esistono aperti densi $U_1, U_2, U_3, \ldots$ tali che:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq G.$$

Una proprietà P(x) si dice *generica* (o *genericamente vera*, o *vera per un punto generico*) nello spazio X se l'insieme $\{x \in X : P(x)\}$ è residuale. Il punto generico è quello che soddisfa tutte le proprietà generiche: esso non appartiene ad alcuno degli insiemi magri, a nessuno dei «sottoinsiemi eccezionali» che occupano — in senso topologico — uno spazio trascurabile.

Il teorema di Baire afferma che in una classe ampia di spazi — che include gli spazi metrici completi e gli spazi di Hausdorff localmente compatti — ogni insieme residuale è denso. La versione più usata del teorema stabilisce quanto segue.

Teorema di categoria di Baire. Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Allora X non è magro in se stesso; equivalentemente, ogni insieme residuale è denso in X; equivalentemente ancora, l'intersezione di ogni famiglia numerabile di aperti densi è densa in X.

La dimostrazione è un argomento di tipo diagonale: si costruisce una successione di palle aperte $B(x_n, \varepsilon_n)$ a raggio decrescente, ciascuna contenuta nella precedente e contenuta in uno degli aperti densi, scegliendo a ogni passo un punto nell'intersezione

non vuota (garantita dalla densità). Il limite della successione dei centri, che esiste per la completezza dello spazio, appartiene all'intersezione di tutti gli aperti densi per costruzione. La completezza è la chiave: essa garantisce che la successione di Cauchy costruita dalla procedura di annidamento converga davvero a un punto dello spazio.

La conseguenza filosoficamente rilevante è la seguente: in un qualsiasi spazio metrico completo, la condizione di appartenere a un insieme magro — a una raccolta numerabile di sottoinsiemi sottili — è una condizione di *eccezionalità topologica*. I punti generici, quelli residuali, sono in un senso preciso «quasi tutti i punti» dello spazio, non perché siano misurabili in senso di Lebesgue (la nozione di misura è distinta e indipendente dalla nozione di categoria di Baire), ma perché nessun insieme aperto riesce a escluderli tutti.

I.4. Genericità e misura: una distinzione fondamentale

A questo punto è indispensabile fare un'osservazione che molti trattamenti divulgativi omettono e che invece è logicamente cruciale: la genericità topologica nel senso di Baire è *indipendente* dalla genericità nel senso della misura. Queste sono due nozioni distinte di «quasi tutti», e in molti spazi esse non coincidono, né l'una implica l'altra.

Sia $X = \mathbb{R}$ con la metrica euclidea e la misura di Lebesgue λ. L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è magro (è un'unione numerabile di punti, ciascuno dei quali è raro perché il suo interno è vuoto) ma ha misura di Lebesgue $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Fin qui le due nozioni concordano. Tuttavia, si può costruire — usando l'assioma della scelta — un sottoinsieme $G \subseteq \mathbb{R}$ che sia residuale (e quindi denso, per il teorema di Baire) ma di misura di Lebesgue $\lambda(G) = 0$: basta prendere un'enumerazione dei razionali $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e definire $G = \bigcap_n U_n$ dove $U_n = \mathbb{R} \setminus \{q_n\}$ è aperto denso; il complemento $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus G$ ha misura nulla, quindi G ha misura piena $\lambda(G) = \lambda(\mathbb{R})$ — questo non è ancora un controesempio. Ma si può costruire, per ogni $\varepsilon > 0$, un aperto denso V_n di misura minore di $\varepsilon/2^n$, e allora $G' = \bigcap_n V_n$ è residuale e ha misura di Lebesgue $\lambda(G') = 0$. L'intersezione di questi aperti densi, topologicamente «quasi tutto lo spazio», è misurabilmente «quasi niente».

Il caso complementare è altrettanto istruttivo. L'insieme di Cantor $C \subseteq [0,1]$ ha misura di Lebesgue nulla, dunque è «piccolo» in senso misurativo; ma esso è un chiuso privo di punti interni, quindi è raro e a fortiori magro. Qui le due nozioni coincidono. Al contrario, si può costruire un «insieme di Cantor grasso» $F \subseteq [0,1]$ che sia chiuso, senza punti interni (quindi ancora magro), ma di misura di Lebesgue positiva, arbitrariamente vicina a 1. Un insieme magro può occupare una porzione arbitrariamente grande dello spazio in senso misurativo.

Questa divergenza tra le due nozioni di quasi-totalità non è un fatto patologico: essa rivela che le nozioni di «categoria» e di «misura» catturano aspetti genuinamente diversi della struttura degli spazi, e che la «genericità» è un concetto che può variare di contenuto a seconda del framework scelto. Nel contesto del forcing insiemistico,

vedremo che la nozione rilevante è quella categoriale — la genericità come evasione da ogni insieme «denso definibile» — piuttosto che quella misurativa, sebbene i due registri possano essere riconciliati in certi contesti tecnici come la misurabilità di Solovay o la teoria delle algebre di Boole complete.

I.5. Il punto generico in geometria algebrica

Prima di affrontare la teoria degli insiemi, merita un cenno la nozione di *punto generico* che Alexander Grothendieck ha posto al centro della geometria algebrica moderna attraverso la teoria degli schemi. Essa costituisce un terzo polo semantico attorno al quale ruota il concetto di genericità, distinto ma strutturalmente analogo ai precedenti.

Nella geometria algebrica classica, una varietà algebrica è uno spazio di soluzioni di un sistema di equazioni polinomiali su un campo algebricamente chiuso. La geometria degli schemi di Grothendieck generalizza radicalmente questa nozione associando a ogni anello commutativo A uno spazio topologico Spec(A) — lo *spettro* di A — i cui punti sono gli ideali primi di A, dotato della topologia di Zariski in cui i chiusi sono i luoghi di zero di famiglie di polinomi. In questo contesto, il punto generico di uno schema irriducibile è il punto η il cui ideale primo associato è (0), l'ideale nullo; la sua chiusura è l'intero schema. Il punto generico di Spec(A) non corrisponde ad alcun punto geometrico «ordinario» — ad alcun punto chiuso, cioè ad alcun ideale massimale — ma la sua chiusura li contiene tutti.

Il punto generico è dunque ciò che «specializza» in qualsiasi punto chiuso mediante il processo di riduzione modulo un ideale massimale. Esso non è un punto che «esiste» in senso geometrico intuitivo, ma è il portatore di tutte le proprietà che valgono genericamente, cioè su un aperto denso dello schema. Una proprietà vale «al punto generico» se e solo se vale su un aperto non vuoto della varietà. Il punto generico di Grothendieck non è un punto fisico ma è il *locus* dove vivono le proprietà generiche: esso è costruito esattamente per rendere precisamente formulabile l'enunciato «vale genericamente».

Questa costruzione rivela un aspetto strutturale essenziale della nozione di genericità: il punto generico non è un elemento tipico nel senso della media statistica, non è un elemento «rappresentativo» nel senso della campionatura; esso è piuttosto quell'entità formale che, per sua costruzione, soddisfa tutto ciò che non la esclude esplicitamente. La sua esistenza dipende da una scelta di linguaggio — la topologia di Zariski, gli ideali primi — e cambierebbe natura con un cambio di topologia. Il generico è sempre relativo a una struttura di esclusione definita da un insieme di predicati disponibili.

I.6. La struttura della genericità: un primo abbozzo

I tre ambiti considerati in questo capitolo inaugurale — la topologia di Baire, la teoria delle varietà di Grothendieck, e il senso comune filosofico pre-matematico — convergono verso una struttura che si può provvisoriamente articolare come segue.

La genericità è una nozione *relazionale*, non assoluta: un elemento è generico non in sé, ma rispetto a una struttura di esclusione definita da un insieme di predicati, di aperti, di condizioni. Essa designa quell'elemento che non appartiene ad alcuno degli insiemi «eccezionali» che quella struttura è in grado di definire. Il generico è il *residuo* di tutte le esclusioni possibili all'interno di un sistema dato; è ciò che sopravvive a ogni tentativo di relegarlo in un insieme marginale.

Questa caratterizzazione ha una conseguenza immediata e profonda: il generico, così definito, *non è definibile* dall'interno del sistema che lo genera. Se fosse definibile, potrebbe essere posto come elemento di un insieme eccezionale, di un insieme chiuso o raro, e quindi cesserebbe di essere generico. Il generico è ciò che *dovrebbe* esistere se la struttura è ricca abbastanza (se lo spazio è completo, se il modello è abbastanza espressivo), ma che *non può essere nominato* con le risorse interne alla struttura stessa. Questa congiunzione di necessità esistenziale e innominabilità interna è il cuore della nozione, e sarà analizzata con la massima precisione tecnica nel capitolo dedicato al forcing coheniano.

Si tratta, in ultima analisi, di una struttura che ha la forma di un limite: il generico è ciò verso cui i predicati della struttura tendono senza mai raggiungerlo, il punto all'infinito di una convergenza che non può stabilizzarsi all'interno del sistema. La completezza metrica nel teorema di Baire, la completezza dell'assiomatica di Zermelo-Fraenkel nel forcing, l'algebraica chiusura del campo nel caso delle varietà: tutte queste «completezze» sono le condizioni che garantiscono l'esistenza del generico, la sua irriducibilità a qualsiasi elemento già nominato nel sistema.

II. Il Forcing di Cohen e l'Irriducibile Insiemistico

II.1. Il problema dell'ipotesi del continuo

Per comprendere la portata della tecnica introdotta da Paul Cohen nel 1963, occorre situarla nel contesto del problema che essa risolse: la questione della determinazione della cardinalità del continuo, rimasta irrisolta per oltre ottant'anni dopo la sua prima formulazione. Georg Cantor, nel 1874, dimostrò con il suo celebre argomento diagonale che l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali non è numerabile, vale a dire che non esiste alcuna funzione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$. La cardinalità del continuo — indicata con $\mathfrak{c}$ o con $2^{\aleph_0}$ — è strettamente superiore alla cardinalità $\aleph_0$ dei numeri naturali. Cantor si interrogò allora sulla posizione di $2^{\aleph_0}$ nella gerarchia degli infiniti transfiniti che egli stesso stava costruendo, e formulò la sua ipotesi: non esiste alcun cardinale infinito strettamente compreso tra $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$, ovvero $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, dove $\aleph_1$ è il primo cardinale infinito non numerabile. Questa è l'ipotesi del continuo (IC). Hilbert la incluse come primo problema nella sua celebre lista del 1900.

Nel 1938, Kurt Gödel fece un passo fondamentale dimostrando che l'ipotesi del continuo è *consistente* con gli assiomi di Zermelo-Fraenkel più l'assioma della scelta (ZFC): se ZFC non contiene contraddizioni — e per il secondo teorema di incompletezza non possiamo dimostrarlo all'interno di ZFC stesso — allora ZFC + IC non ne contiene. Gödel ottenne questo risultato costruendo l'*universo costruibile* L, un modello di ZFC in cui ogni insieme è definibile da una formula del linguaggio insiemistico con parametri in ranghi precedenti. In L, vale l'ipotesi del continuo: Gödel mostrò che $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ in L. Il costruibile è, per così dire, l'universo più parsimonioso che soddisfa ZFC: esso contiene esattamente gli insiemi che devono necessariamente esistere data la struttura degli assiomi.

Restava aperta la questione dell'indipendenza: IC può essere confutata all'interno di ZFC? Gödel stesso era convinto di no, e che IC fosse falsa nell'«universo reale» degli insiemi — qualunque cosa tale espressione significasse —, ma non disponeva degli strumenti tecnici per dimostrare la consistenza della sua negazione. Cohen li costruì.

II.2. Modelli transitivi e il punto di partenza

La strategia di Cohen consiste nell'opposto di quella di Gödel: invece di costruire un modello minimale, egli espande un modello dato aggiungendovi nuovi insiemi «generici» che violano IC. Il punto di partenza è un *modello transitivo numerabile* M di (un frammento sufficiente di) ZFC. Un modello transitivo è un insieme M tale che ogni elemento di un elemento di M appartiene anch'esso a M: se $a \in b \in M$ allora $a \in M$. La transitivita garantisce che i quantificatori relativizzati a M si comportino in modo «assoluto» rispetto a molte nozioni set-teoriche fondamentali.

L'esistenza di tali modelli non è dimostrabile all'interno di ZFC (ciò richiederebbe la consistenza di ZFC, che ZFC non può provare), ma si assume per ipotesi, oppure si lavora con modelli di un frammento finito sufficiente degli assiomi. Questa assunzione non è indebolimento del risultato: il teorema di Cohen stabilisce che se esiste un modello di ZFC, allora esistono modelli sia di ZFC + IC sia di ZFC + ¬IC.

Sia dunque M un tale modello transitivo numerabile. Si noti che «numerabile» qui ha un senso relativo: M è numerabile dal punto di vista esterno — dal punto di vista di chi lo osserva dall'esterno — ma può «credere di essere non numerabile» internamente, perché le funzioni di enumerazione non appartengono necessariamente a M. Questo fenomeno — lo *skolem paradox* nella sua forma operativa — è una delle sottigliezze fondamentali dell'intera costruzione.

II.3. L'idea del forcing: aggiungere informazione senza determinarla in anticipo

Il nocciolo dell'intuizione di Cohen può essere formulato come segue. Si vuole aggiungere a M un nuovo oggetto — ad esempio un sottoinsieme reale $G \subseteq \omega$, cioè una funzione caratteristica $g : \omega \to \{0,1\}$ — che non sia già in M e che abbia proprietà

controllate. Il problema è che se si specificasse completamente G dall'esterno, si potrebbe semplicemente «iniettarlo» in M come parametro, ottenendo un'estensione banale. Cohen vuole invece che G sia «generico» rispetto a M: non definibile da nessun predicato di M, capace di «attraversare» ogni insieme denso definibile in M senza esserne catturato.

Il meccanismo tecnico che realizza questa idea è quello delle *condizioni di forcing*. Si fissa un *parziale ordine* $(P, \leq) \in M$, detto *nozione di forcing*. Gli elementi di P sono le condizioni; la relazione $\leq$ è la relazione di estensione. Nella pratica, ogni condizione p è un'informazione parziale e finita sull'oggetto che si vuole aggiungere; $p \leq q$ significa che p *estende* q, cioè che p contiene tutte le informazioni di q e ne aggiunge ulteriori. Si assume che P abbia un elemento massimale 1_P — la condizione banale che non afferma nulla — e che $\leq$ sia un ordine parziale nel senso usuale (riflessivo, transitivo, antisimmetrico).

Due condizioni p e q si dicono *compatibili* se esiste $r \in P$ tale che $r \leq p$ e $r \leq q$ — se c'è una condizione più forte di entrambe, una informazione coerente che le contiene entrambe. Sono *incompatibili* in caso contrario. Un sottoinsieme $A \subseteq P$ si dice *antichain* se ogni due suoi elementi distinti sono incompatibili.

Nella costruzione più semplice, quella che aggiunge un singolo «reale di Cohen», si prende $P = Fn(\omega, 2)$, l'insieme delle funzioni parziali finite da ω a $\{0,1\}$:

$$Fn(\omega, 2) = \{\, p : p \text{ è una funzione, } dom(p) \subseteq \omega \text{ è finito, } ran(p) \subseteq \{0,1\} \,\}$$

La relazione di estensione è l'inclusione funzionale: $p \leq q$ se e solo se $p \supseteq q$ come funzioni, cioè se $dom(q) \subseteq dom(p)$ e $p(n) = q(n)$ per ogni $n \in dom(q)$. Una condizione $p \in Fn(\omega, 2)$ è un'informazione finita su come si comporterà la funzione caratteristica g del nuovo insieme reale: afferma che $g(n) = p(n)$ per ciascun n nel (finito) dominio di p. Una condizione più forte specifica il comportamento di g su più valori.

II.4. Filtri e filtri generici

Un *filtro* su P è un sottoinsieme $G \subseteq P$ che soddisfa tre condizioni. In primo luogo, G è non vuoto e $1_P \in G$. In secondo luogo, G è *chiuso verso l'alto*: se $p \in G$ e $p \leq q$ (cioè q è più debole di p, q è già «implicato» da p), allora $q \in G$. Questa condizione afferma che tutte le conseguenze di una condizione in G appartengono anch'esse a G: il filtro è coerente con la logica delle implicazioni. In terzo luogo, G è *diretto verso il basso*: per ogni $p, q \in G$ esiste $r \in G$ con $r \leq p$ e $r \leq q$. Questa condizione garantisce che ogni due condizioni nel filtro siano *compatibili* tra loro — che possano essere «rafforzate insieme» a una condizione unica — e dunque che le informazioni raccolte in G siano globalmente coerenti.

Un filtro generico è un filtro che soddisfa una condizione supplementare cruciale. Per capirla, si introduce la nozione di *insieme denso*. Un sottoinsieme $D \subseteq P$ è denso se per

ogni $p \in P$ esiste $q \in D$ con $q \leq p$: qualunque condizione si scelga, la si può rafforzare fino a ottenere qualcosa in D. L'insieme denso D è una proprietà che non si può «evitare» raffinando sufficientemente le condizioni: ogni linea di sviluppo delle condizioni prima o poi passa attraverso D.

Definizione. Sia M un modello transitivo, $(P, \leq) \in M$ una nozione di forcing. Un filtro $G \subseteq P$ si dice *M-generico su P* se per ogni insieme denso $D \in M$ si ha $G \cap D \neq \varnothing$.

L'M-genericità è dunque la condizione di *non evitare nessun insieme denso definibile in M*. Il filtro generico attraversa tutti gli insiemi densi di M, incontrando ogni «ostacolo» che M è in grado di costruire. La genericità è definita *relativamente a M*: non si chiede che G incontri tutti gli insiemi densi assoluti, ma soltanto quelli che appartengono al modello di base. Un insieme denso che non appartiene a M non può essere usato per «testare» la genericità di G rispetto a M.

Il teorema di esistenza del filtro generico è il primo risultato fondamentale:

Teorema (Cohen). Sia M un modello transitivo numerabile di ZFC e $(P, \leq) \in M$ una nozione di forcing. Allora esiste un filtro $G \subseteq P$ che è M-generico su P. Inoltre, $G \notin M$.

La dimostrazione usa essenzialmente la numerabilità di M: poiché M è numerabile, la famiglia degli insiemi densi di M che appartengono a M è essa stessa numerabile — sia $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un'enumerazione. Si costruisce G per una procedura diagonale: si sceglie $p_0 \in D_0$ arbitrariamente; poi, dato $p_n \in D_n$, si sceglie $p_{n+1} \in D_{n+1}$ con $p_{n+1} \leq p_n$ (il che è possibile perché D_{n+1} è denso, quindi ogni condizione può essere rafforzata fino a incontrarla). La successione discendente $p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq \dots$ determina un filtro:

$$G = \{ q \in P : \exists\, n \in \mathbb{N},\ p_n \leq q \}$$

Per costruzione, $G \cap D_n \neq \varnothing$ per ogni n, dunque G è M-generico. Che $G \notin M$ segue dal fatto che G ha un'intersezione non vuota con ogni insieme denso di M; se G appartenesse a M, l'insieme $D = \{ p \in P : p \notin G \}$ sarebbe denso in M (ogni condizione può essere rafforzata a qualcosa fuori da G, usando la densità dei complementi degli elementi di G), il che contraddirebbe l'M-genericità.

La non-appartenenza di G a M è la forma tecnica del suo essere «inclassificabile dall'interno di M»: G non è definibile attraverso alcuna ricetta disponibile nel modello di base.

II.5. L'estensione generica M[G]

Dato il filtro generico G, si costruisce il modello esteso M[G] — la *estensione generica* di M mediante G. Questo modello è il più piccolo modello transitivo di ZFC che contiene sia M che G come elementi. La costruzione di M[G] si realizza attraverso il

meccanismo dei *nomi*, o *P-nomi*: ad ogni oggetto che si vorrà inserire in M[G] si associa preventivamente, all'interno di M, un nome nel linguaggio del forcing, ovvero un «descrittore» che specifica come quell'oggetto verrà costruito a partire da G.

Più precisamente, la classe dei P-nomi si definisce per ricorsione: un P-nome è un insieme di coppie (τ, p) dove τ è a sua volta un P-nome e $p \in P$. I P-nomi sono dunque strutture ricorsive che «aspettano» un filtro generico per diventare insiemi concreti. L'interpretazione di un nome τ nel filtro G è:

$$val(\tau, G) = \{ val(\sigma, G) : \exists p \in G, (\sigma, p) \in \tau \}$$

L'insieme M[G] è la collezione di tutti i $val(\tau, G)$ per τ un P-nome in M. Si dimostra che M[G] è un modello transitivo di ZFC, che $M \subseteq M[G]$, che $G \in M[G]$, e che M[G] è il minimo modello con queste proprietà. Crucialmente, M e M[G] hanno gli stessi ordinali: il forcing non aggiunge nuovi cardinali «creati dal nulla», ma può modificare le relazioni di cardinalità tra insiemi già esistenti (o i nuovi insiemi aggiunti).

Nel caso del reale di Cohen: il filtro $G \subseteq Fn(\omega, 2)$ determina una funzione totale $g = \cup G : \omega \to \{0,1\}$, poiché la genericità garantisce che per ogni $n \in \omega$ esiste $p \in G \cap D_n$, dove $D_n = \{p \in Fn(\omega, 2) : n \in dom(p)\}$ è l'insieme denso delle condizioni che «decidono» il valore su n. Il reale di Cohen è questo g, interpretato come sottoinsieme di ω attraverso la sua funzione caratteristica. Esso è un nuovo elemento di $2^\omega \cap M[G]$ che non appartiene a M.

II.6. La relazione di forcing e il Lemma Fondamentale

Il cuore tecnico della costruzione è la *relazione di forcing* $\Vdash$, che mette in corrispondenza le condizioni $p \in P$ con le formule del linguaggio insiemistico. Si scrive:

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau)$$

per indicare che la condizione p *forza* la formula φ applicata ai nomi $\tau_1, \ldots, \tau$: ogni filtro generico G contenente p verificherà $\varphi(val(\tau_1,G), \ldots, val(\tau ,G))$ nel modello M[G]. La relazione $\Vdash$ è definita *interamente all'interno di M*, per ricorsione sulla complessità delle formule:

Per le formule atomiche $\tau \in \sigma$ e $\tau = \sigma$, la definizione procede per ricorsione sulla struttura dei nomi. Per le connettive:

$p \Vdash \neg\varphi$ se e solo se $\forall q \leq p$, q non forza φ
$p \Vdash \varphi \wedge \psi$ se e solo se $p \Vdash \varphi$ e $p \Vdash \psi$
$p \Vdash \exists x\, \varphi(x)$ se e solo se $\exists$ nome $\tau \in M$, $p \Vdash \varphi(\tau)$

La quantificazione universale si gestisce attraverso la negazione e quella esistenziale.

Il **Lemma Fondamentale del Forcing** (o Truth Lemma) stabilisce la coerenza di questa definizione:

Lemma. Sia G un filtro M-generico su P. Allora per ogni formula φ e nomi $\tau_1, \ldots, \tau$:

$M[G] \models \varphi(val(\tau_1,G), \ldots, val(\tau ,G))$ se e solo se $\exists p \in G, p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau)$

Questo lemma afferma che ogni verità in M[G] è già «preveduta» — o più correttamente, *forzata* — da qualche condizione nel filtro generico. La verità in M[G] non emerge dal nulla: è sempre «precertificata» da un'informazione finita che appartiene a G. Al tempo stesso, nessuna condizione finita fissa interamente la verità in M[G]: per ogni formula φ e ogni $p \in P$, esiste sempre $q \leq p$ tale che $q \Vdash \varphi$ oppure $q \Vdash \neg\varphi$ (questo è il *principio di densità*, o *Lemma di decidibilità*). Le condizioni generiche non lasciano nulla indefinito nel limite, ma non lo definiscono mai prematuramente.

II.7. La dimostrazione dell'indipendenza di IC

Per dimostrare che IC è indipendente da ZFC, occorre costruire un modello di ZFC + IC (già fornito da Gödel con L) e un modello di ZFC + ¬IC (fornito dal forcing). Cohen scelse come nozione di forcing:

$P = Fn(\omega_2 \times \omega, 2) = \{ p : p \text{ funzione parziale finita da } \omega_2 \times \omega \text{ a } \{0,1\} \}$

dove ω_2 è il secondo cardinale infinito non numerabile di M. Le condizioni sono funzioni finite che specificano valori su coppie (α, n) con $\alpha < \omega_2$ e $n \in \omega$. Il filtro generico G determina una funzione totale $F : \omega_2 \times \omega \to \{0,1\}$, che si interpreta come una famiglia $\{F_a\}_{a<\omega_2}$ di sottoinsiemi di ω — cioè di reali. Cohen dimostrò che:

(a) Ciascun F_a è un nuovo reale non in M, distinto da tutti i reali di M. (b) Gli F_a sono a due a due distinti per $\alpha < \beta < \omega_2$. (c) In M[G], la cardinalità di ω_2 è preservata — ω_2 rimane il secondo cardinale infinito non numerabile — usando la proprietà dell'*antichain condition* (o *c.c.c.*, countable chain condition): la nozione di forcing $Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$ soddisfa la condizione delle antichene numerabili, il che garantisce che i cardinali di M non vengano collassati in M[G].

Dalla (b) e dalla (c) segue che M[G] contiene almeno ω_2 reali distinti, dunque $2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$ in M[G], il che nega IC.

La proprietà c.c.c. è fondamentale: essa assicura che la nozione di forcing non «collassi» i cardinali, non identifichi due cardinali distinti di M. Si dice che P soddisfa la *countable chain condition* se ogni antichain in P è al più numerabile. Per $Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$, la c.c.c. segue dal fatto che due condizioni incompatibili devono differire su qualche coppia (α, n) del loro dominio comune, e i domini finiti di due condizioni

incompatibili devono avere una sovrapposizione di tipo incompatibile: un argomento di tipo delta-system mostra che ogni antichain è numerabile.

II.8. La struttura logica della genericità: il non-definibile necessario

Il forcing coheniano porta alla luce, con la massima chiarezza formale, la struttura che avevamo abbozzato alla fine del capitolo precedente. Il filtro generico G è un oggetto che:

(a) Non appartiene al modello di base M: non è definibile con le risorse linguistiche e logiche di M, non è costruibile mediante le operazioni disponibili in M.

(b) È completamente determinato come oggetto una volta scelto: ogni enunciato del linguaggio della teoria degli insiemi ha un valore di verità definito in M[G]; la verità in M[G] è bivalente e completa.

(c) La sua esistenza è garantita *a condizione che M sia numerabile*: la numerabilità di M è la condizione di possibilità dell'esistenza del generico, perché consente la diagonalizzazione sugli insiemi densi. In un modello non numerabile, la procedura costruttiva non sarebbe applicabile.

(d) Il generico G è «massimamente compatibile» con la struttura P: esso non evita nessun insieme denso di M, cioè non evita nessuna proprietà che M riconosca come inevitabile. Questa massima compatibilità è l'antipertico esatto della sua innominabilità: G è ciò che rimane dopo che tutte le esclusioni possibili sono state eluse.

Si tratta di una struttura epistemologicamente vertiginosa. Il generico è necessario — deve esistere, data la costruzione — ma la sua necessità è *estrinseca* al modello: essa è una necessità che il modello non riesce a «vedere», perché per vederla occorrerebbe stare fuori da M. Dal punto di vista interno di M, il generico non è costruibile, non è prevedibile, non è nominabile con alcun termine del linguaggio di M. Dal punto di vista esterno — il punto di vista di chi costruisce l'intera architettura — G è un oggetto preciso, con proprietà definite, che soddisfa esattamente una condizione di attraversamento massimale degli insiemi densi.

Questa doppia prospettiva — l'interno e l'esterno del modello, la visuale di M e quella del matematico che lo osserva — è la struttura fondamentale che rende il forcing filosoficamente profondo al di là della sua funzione tecnica nella dimostrazione dell'indipendenza. Il generico non è il caos: è l'ordine che nessun ordine interno può produrre. Non è il casuale: è il sistematicamente inevaso da ogni sistema di cattura finito. È l'eccedenza strutturale di ogni sistema sufficientemente espressivo rispetto alle proprie risorse di nominazione.

Questa struttura — necessità estrinseca, innominabilità interna, attraversamento massimale — è esattamente quella che Alain Badiou ritroverà nella struttura

dell'evento e della verità, trasponendola dal registro della teoria degli insiemi a quello di un'ontologia generale dell'essere e dell'accadimento. A questa trasposizione è dedicato il capitolo seguente.

III. Badiou: la Verità come Sottoinsieme Generico

III.1. L'identificazione ontologica

Alain Badiou ha costruito, in *L'Être et l'événement* (1988) e nel successivo *Court traité d'ontologie transitoire* (1998), un sistema filosofico di rara ambizione sistematica, il cui punto di partenza è un'identificazione che, enunciata nella sua brutalità, appare quasi come una provocazione: l'ontologia — la scienza dell'essere in quanto essere — coincide con la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel. Non è una metafora, non è un'analogia strutturale, non è un'ispirazione formale: è una tesi di identità. L'essere, in quanto pensabile — in quanto suscettibile di essere detto nell'indifferenza a ogni predicato qualitativo, senza riferimento a nessuna sostanza, essenza o attributo determinato — si presenta come molteplicità pura, e la teoria assiomatica degli insiemi è la scienza di questa molteplicità pura nella sua sola struttura di appartenenza.

L'identificazione non è arbitraria: essa è motivata da un argomento di sottrazione. Ogni presentazione dell'essere si effettua attraverso una situazione — una struttura che conta come uno i suoi elementi, che opera una presentazione degli insiemi rendendoli enti — ma l'essere in quanto essere, prima di ogni presentazione, non è ancora uno: è molteplice senza essere numerato, incoerente prima di diventare coerente sotto il conteggio della struttura. La teoria degli insiemi di Cantor-Zermelo-Fraenkel, nella sua austerità assiomatica, non tematizza altro che l'appartenenza ($\in$) e ciò che da essa si può derivare senza fare appello ad alcun contenuto qualitativo. L'assioma della fondazione esclude insiemi circolari: ogni insieme ha un elemento che ne è disgiunto. Gli assiomi di separazione, rimpiazzamento, unione, e potenza costruiscono l'universo degli insiemi a partire dall'unico primitivo $\in$. In questa nudità predicativa, Badiou riconosce la forma propria dell'ontologia.

Una situazione è dunque, per Badiou, un insieme fornito di una struttura di presentazione: una coppia (S, ε) dove S è un insieme e ε è un operatore di conteggio che rende coerente la molteplicità di S presentandone gli elementi come «unità». Lo stato della situazione — o metastruttura — è la struttura che conta come uno le parti di S, le sottomolteplicità incluse in S, e corrisponde esattamente all'insieme delle parti $\mathscr{P}(S)$. La distinzione tra appartenenza ($\in$, relazione tra elementi e la situazione) e inclusione ($\subseteq$, relazione tra sottoinsiemi e la situazione) è la distinzione ontologica fondamentale tra *presentazione* e *rappresentazione*.

III.2. Il vuoto, il sito evento e la fondazione

Il punto di partenza ontologico della situazione — il suo «fondamento» — è il vuoto. L'assioma dell'insieme vuoto garantisce l'esistenza di $\varnothing$: l'insieme privo di elementi, la molteplicità di nessuna molteplicità. Per Badiou, il vuoto è il «sigillo dell'essere» presentato in ogni situazione: non come un elemento ordinario, non come un contenuto, ma come il presupposto irriducibile di ogni conta, come il nome dell'essere in quanto tale prima di ogni predicazione. Ogni insieme è, in ultima analisi, costruito dal vuoto — questa è la conseguenza filosofica della costruzione iterata della gerarchia Von Neumann $V_0 = \varnothing$, $V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_\alpha)$, $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ — e dunque ogni situazione ha nel vuoto il suo fondamento ontologico.

La nozione di *sito evento* è quella di un insieme x appartenente a una situazione S tale che $x \in S$ ma x «appartiene a se stesso» nella misura in cui i suoi elementi non sono presentati dalla struttura di S: per ogni $y \in x$, $y \notin S$. Il sito evento è una molteplicità «sul bordo del vuoto», i cui elementi — le componenti della molteplicità che ne è il supporto — sono invisibili alla struttura della situazione. La terminologia di Badiou è volutamente paradossale: l'assioma della fondazione di ZFC esclude esattamente che un insieme appartenga a se stesso ($\forall x, x \notin x$), ma Badiou usa il termine in senso traslato — l'insieme appartiene alla situazione ma i suoi elementi non vi appaiono, il che crea un'eccedenza analoga all'auto-appartenenza rispetto alla struttura.

Un evento è dunque, in prima approssimazione, un sito evento più se stesso come elemento aggiuntivo — una molteplicità che si nomina, che «si conta» nella struttura in modo supplementare rispetto a qualunque capacità contabile già in essa disponibile. L'evento è ciò che forza la struttura a riconoscere la propria insufficienza, a registrare una eccedenza che non può essere assorbita nelle sue procedure di conta normali.

III.3. La procedura di verità e il soggetto

Una *procedura di verità* è, per Badiou, un processo post-evenemenziale che consiste nel progressivo dispiegamento delle conseguenze dell'evento all'interno della situazione. Essa è avviata da ciò che Badiou chiama una *fidelità* — una procedura di indagine (enquête) che, per ogni elemento della situazione, decide se esso è «connesso» all'evento o no. Il soggetto è l'operatore finito di questa procedura: non una sostanza psicologica, non un'autocoscienza trascendentale, ma una funzione — la funzione che, in ciascun momento della procedura, applica il criterio di connessione all'elemento esaminato.

La procedura di verità accumulata genera, col passare del tempo (o meglio, attraverso l'iterazione infinita delle indagini), un insieme di elementi della situazione: quelli che risultano connessi all'evento. Chiamiamo questo insieme, nel linguaggio tecnico del forcing, $\mathbb{P}$ — l'insieme delle condizioni positive, degli elementi «toccati» dall'evento. La struttura che emerge non è ancora una verità compiuta: è un processo infinito di approssimazione. Una verità compiuta sarebbe il risultato limite di tutte le indagini — l'insieme completo degli elementi connessi all'evento — un oggetto che nessun momento finito del processo può raggiungere.

Qui il forcing fa la sua comparsa esplicita. Badiou identifica la procedura di verità con la costruzione del filtro generico di Cohen. La situazione S corrisponde al modello transitivo M; gli elementi della situazione esaminati dalla procedura di verità corrispondono alle condizioni del parziale ordine P; la verità compiuta — l'insieme limite ♀ (Badiou usa questo simbolo per la verità generica) — corrisponde al filtro generico G.

La condizione di genericità ha ora una lettura filosofica precisa: ♀ è una verità se e soltanto se essa non è inclusa in nessun sottoinsieme della situazione che sia *enciclopedicamente* definito — cioè definibile attraverso le risorse predicative della struttura in atto. In termini di forcing, ♀ è generico rispetto a M se e soltanto se per ogni insieme denso $D \in M$ si ha $♀ \cap D \neq \varnothing$. Gli insiemi densi di M sono, nel linguaggio filosofico di Badiou, i *saperi enciclopedici* della situazione: le classificazioni, le tassonomie, i sistemi di predicazione disponibili all'interno dello stato di cose dato.

La verità è dunque ciò che attraversa ogni enciclopedia senza essere catturato da nessuna di esse. Essa non appartiene ad alcuna categoria già disponibile nella situazione, non è riconducibile ad alcun sapere costituito — eppure è massimamente *compatibile* con la struttura della situazione: essa soddisfa ogni condizione di compatibilità, attraversa ogni insieme denso di possibilità. Il generico non è il caos della verità rivoluzionaria: è il suo ordine inapparente, la sua coerenza sistematica non riconoscibile dall'interno del sapere già costituito.

III.4. Il nome innominabile e il forzamento

Una delle operazioni più sottili del sistema badiousiano è il *forçage* — la trasposizione nella filosofia del forcing tecnico di Cohen. Ricordiamo: nella costruzione coheniana, la relazione di forcing $p \Vdash \varphi$ è definita *all'interno di M*, e stabilisce le condizioni sotto le quali una formula sarà vera nel modello esteso M[G]. Il Lemma Fondamentale garantisce che ogni verità in M[G] è già precertificata da qualche condizione del filtro generico.

Badiou traduce questa struttura nel modo seguente. In una situazione data, il soggetto che opera la procedura di verità può, a partire da una condizione finita della procedura stessa (un frammento già realizzato della verità), «forzare» affermazioni sulla verità compiuta. Una condizione p forza l'enunciato φ (scritto $p \Vdash \varphi$) se ogni procedura di verità che passa per p renderà φ vero nella situazione genericamente estesa. Il forzamento è dunque la forma logica della *anticipazione soggettiva*: il soggetto, a partire da un frammento finito dell'indagine, non *sa* ancora la verità compiuta (perché non la possiede nella sua interezza infinita), ma può *prevedere* ciò che sarà vero nella situazione risultante.

Il *nome innominabile* — il simbolo ♀ del risultato compiuto della procedura — è il nome di un oggetto che non esiste ancora nella situazione corrente, ma la cui esistenza è garantita dall'estensione generica. Esso è il «nome della verità»: un nome che non si può riempire di contenuto enciclopedico, che non si può identificare con nessuna molteplicità già presente nella situazione, ma che è funzionale — permette di

ragionare sul risultato della procedura come se fosse già lì, articolando le conseguenze della sua eventuale comparsa.

Qui risiede la differenza fondamentale tra il sapere e la verità, nel sistema di Badiou. Il sapere è predicativo: un'affermazione di sapere ha la forma «x appartiene all'enciclopedia E», dove E è un sottoinsieme della situazione definibile dalle sue risorse interne. La verità è impredicativa: l'enunciato «x appartiene alla verità ♀» non è riducibile ad alcuna predicazione interna alla situazione, perché ♀ è generica, e la genericità è esattamente la condizione di non-appartenenza a nessun insieme eccezionale definibile dall'interno.

III.5. Le quattro procedure generiche e la forma universale del generico

Badiou identifica quattro tipologie di procedure di verità — quattro domini nei quali il generico può dispiegarsi: la scienza (più precisamente, la matematica e le scienze matematizzate), l'arte, la politica (nella forma specifica della politica emancipatrice), e l'amore. Ciascuna di queste procedure ha la medesima struttura formale — un evento, una fidelità, un processo di indagine, una verità generica come risultato limite — ma si differenzia per il materiale situazionale sul quale opera e per la forma del soggetto che ne è l'operatore.

La scienza produce verità generiche sulle strutture matematiche e naturali: la scoperta di Galois della teoria dei gruppi, la rivoluzione copernicana, la fondazione cantoriana dell'aritmetica transfinita sono, per Badiou, eventi seguiti da procedure di verità che trasformano irrevocabilmente il campo del sapere matematico-scientifico. L'arte produce verità generiche sull'essere-sensibile: un'opera d'arte autentica è un processo di verità sulla percezione, sulla forma, sull'affetto — non una rappresentazione di un contenuto già disponibile, ma una produzione di nuove possibilità percettive che eccedono ogni enciclopedia estetica preesistente. La politica emancipatrice produce verità generiche sull'essere-insieme, sulla capacità collettiva di costruire nuove forme di vita in comune al di là delle classificazioni identitarie imposte dalla struttura statale. L'amore produce verità generiche sull'essere-due, sulla possibilità di elaborare il mondo dal punto di vista della differenza di due soggettività irreducibili.

La generalità di questa struttura filosofica è, per Badiou, una conseguenza diretta della struttura matematica del generico. Non è che la matematica fornisca un'*analogia* alla verità filosofica: è che la matematica *è* l'ontologia, e le sue strutture sono le strutture dell'essere stesso. Il filtro generico di Cohen non è un modello del processo di verità: è la sua *descrizione ontologica* precisa.

III.6. La critica e i limiti del sistema

Il sistema badiousiano non è esente da difficoltà — e alcune di esse hanno rilevanza diretta per la nozione di genericità che stiamo analizzando.

La prima difficoltà è quella che si potrebbe chiamare il *problema della relativizzazione*. Il filtro generico G è generico *rispetto al modello M*, non in senso assoluto. Se si cambia il modello di base — se si passa da M a un'altra struttura M' — l'insieme di insiemi densi cambia, e un filtro che era M-generico potrebbe non essere M'-generico. La genericità è irreducibilmente relazionale, non assoluta. Questo crea un problema per l'ambizione universalistica di Badiou: se la verità è generica rispetto alla *situazione*, allora non esiste «la verità» in senso assoluto, ma solo «verità relative a situazioni». Badiou è consapevole di questa difficoltà e risponde che ogni procedura di verità è universalizzabile nel senso che le sue conseguenze sono indifferenti all'identità dei soggetti che le recepiscono — non dipendono da chi li riceve ma solo dalla struttura della procedura stessa. Ma questo non elimina la relativizzazione al modello-situazione.

La seconda difficoltà è il *salto dall'ontologia alla fenomenologia*. Il forcing insiemistico è una tecnica per costruire modelli di ZFC: opera interamente all'interno della matematica formale. Il passaggio dalla teoria degli insiemi alle situazioni storiche, politiche, artistiche, amorose richiede un lavoro di analogia o di trasposizione che Badiou non sempre giustifica con la precisione richiesta. Le procedure di verità nelle quattro condizioni generiche non sono letteralmente filtri generici su parziali ordini insiemistici: il parziale ordine non è esplicitamente specificato, le condizioni non sono definite formalmente, la relazione di forcing non è calcolabile. La ricchezza filosofica del sistema è indubitabile, ma il rapporto tra la struttura matematica e le sue applicazioni fenomenologiche rimane, in molti passi cruciali, di natura metaforica piuttosto che strettamente formale.

La terza difficoltà riguarda l'assioma della fondazione. Badiou usa la nozione di «sito evento» come molteplicità i cui elementi sono non-presentati dalla situazione, e caratterizza l'evento come qualcosa che include se stesso come elemento aggiuntivo — una struttura che l'assioma della fondazione proibisce esattamente. Per Badiou, l'evento è *ultra-uno*: eccede la struttura ontologica normale degli insiemi ben-fondati. Ma allora in quale universo insiemistico vive l'evento? Se ZFC con la fondazione è l'ontologia, e l'evento viola la fondazione, l'evento è *anti-ontologico* nel senso di non essere riducibile all'essere-ordinario. Badiou ne fa una virtù — l'evento non è essere ma è il supplemento dell'essere, la contingenza irriducibile dell'accadimento — ma questo crea una tensione tra il programma ontologico fondato su ZFC e la teoria dell'evento che eccede ZFC.

III.7. Il generico come forma dell'universale concreto

Nonostante queste difficoltà — o forse proprio attraverso di esse — il contributo di Badiou alla concettualizzazione filosofica della genericità rimane di straordinaria importanza. Egli ha identificato, con precisione tecnica ineguagliata nella tradizione filosofica continentale, la forma logica dell'universale concreto: un universale che non è astrazione predicativa (non è ottenuto per generalizzazione di proprietà comuni), non è sostanza platonica (non esiste in un iperuranio separato), non è costruzione convenzionale (non dipende da accordi intersoggettivi), ma è il risultato limite di un

processo reale di attraversamento di tutti gli ostacoli definitivi che una struttura può erigere.

Il generico è universale non perché trascende i particolari, ma perché attraversa sistematicamente tutti i particolari, non ne esclude nessuno, è compatibile con tutti i predicati che non lo escludono esplicitamente. È un universale «dal basso» — costruito per accumulazione di compatibilità, non per astrazione di differenze. La sua forma matematica precisa — il filtro che interseca ogni insieme denso — è la descrizione esatta di questo attraversamento sistematico.

Questa struttura ha conseguenze profonde per la filosofia della matematica stessa. Il teorema di incompletezza di Gödel può essere riletto, in questa luce, come un teorema sulla *non-genericità dell'aritmetica* rispetto a se stessa: l'aritmetica non può essere il filtro generico della propria struttura, non può attraversare tutti i propri insiemi densi di enunciati indecidibili. Il forcing dimostra che esistono *estensioni* dell'aritmetica (o della teoria degli insiemi) che sono generiche rispetto alla struttura di partenza — ma questa genericità è sempre relativa, sempre prospettica, sempre correlata a un modello da cui si parte.

Il generico, in ultima analisi, non è ciò che «sfugge al sistema»: è ciò che il sistema, per essere completo, dovrebbe già contenere e non può. Non è l'irrazionale né il mistico: è la forma matematicamente precisa dell'eccedenza strutturale che ogni sistema sufficientemente potente porta inscritta nella propria architettura. Badiou ha avuto il merito di riconoscere in questa struttura non un limite dell'impresa razionale, ma la sua risorsa più feconda: la possibilità sempre aperta di estensioni generiche che conservano la coerenza strutturale di partenza pur aggiungendovi ciò che la struttura non poteva nominare.

IV. Il Tipo Nomenclatoriale: la Singolarità al Posto dell'Universale

IV.1. L'enigma della specie e la soluzione linneana

La biologia sistematica — la scienza che classifica, nomina e descrive la diversità del vivente — ha prodotto, nel corso dei secoli dalla rivoluzione linneana ad oggi, uno dei sistemi di categorizzazione più estesi e ramificati che l'impresa intellettuale umana abbia mai costruito. Milioni di specie descritte, decine di migliaia di generi, migliaia di famiglie, ordini, classi, phyla: una gerarchia di universali che copre l'intera superficie della vita. Eppure questo sistema di universali riposa, nella sua architettura fondamentale, su una nozione che costituisce il suo esatto opposto: il *tipo nomenclatoriale*, un individuo concreto, singolare, spesso morto da secoli e conservato in un cassetto di museo, che funge da ancora di riferimento per l'intera categoria.

La nozione di tipo è una risposta pragmatica a un problema epistemologico genuino: come garantire la stabilità del nome specifico nel tempo, attraverso cambiamenti di

classificazione, revisioni tassonomiche, scoperte di nuove popolazioni? Il problema è acuto perché la specie non è una classe nominale di cui siano immediatamente perspicue le condizioni di appartenenza. Le specie biologiche cambiano, si ibridano, si scindono, si unificano sotto revisioni tassonomiche successive; le loro caratteristiche diagnostiche vengono reinterpretate man mano che si accumula conoscenza morfologica, fisiologica, molecolare. Se il nome della specie fosse ancorato a una definizione predicativa — a un insieme di caratteristiche morfologiche da soddisfare — ogni modifica della definizione rischierebbe di far «scivolare» il nome verso un diverso referente biologico. Il tipo fornisce un ancoraggio *indicale* piuttosto che *predicativo*: il nome della specie designa esattamente la stessa entità biologica (in senso lato) attraverso tutti i cambiamenti di definizione, perché è il nome dell'esemplare-tipo che costituisce il centro di riferimento, non l'insieme delle caratteristiche descrittive associate.

IV.2. L'architettura del Codice e la gerarchia dei tipi

Il sistema dei tipi nomenclatoriali è governato, nella zoologia e nella botanica, da codici internazionali di nomenclatura scientifica che ne regolamentano la struttura con una precisione quasi giuridica. Il *Codice Internazionale di Nomenclatura Zoologica* (ICZN, nelle sue successive edizioni fino alla quarta del 1999) e il *Codice Internazionale di Nomenclatura per alghe, funghi e piante* (ICN, già ICBN) stabiliscono una gerarchia di tipi che risponde a situazioni diverse e che vale la pena di articolare con cura.

L'*olotipo* è il tipo nomenclatoriale per eccellenza: il singolo esemplare designato dall'autore originale della specie al momento della sua descrizione pubblicata. Quando Linneo descrisse nel 1758 *Homo sapiens* nel *Systema Naturae*, non designò esplicitamente un olotipo — la pratica della designazione esplicita non era ancora sistematizzata. Un olotipo designato esplicitamente è l'oggetto concreto — un uccello impagliato, un insetto infilzato su spillo, una pianta essiccata tra due fogli di carta, una roccia con fossile inciso — che porta in se stesso l'identità nomenclatoriale della specie. Esso è custodito, di norma, in un museo di storia naturale o in un erbario istituzionale, con un numero di catalogo che lo rende rintracciabile e consultabile.

Il *lectotipo* è un tipo scelto *a posteriori* da una serie sintipia — i vari esemplari esaminati dall'autore originale senza designazione di un tipo primario — da un revisore successivo, secondo procedure regolamentate dal Codice. Il *neotipo* è un tipo designato quando l'olotipo o la serie sintipia originale sono irrimediabilmente perduti o distrutti, e si rende necessario fissare un nuovo ancoraggio nomenclatoriale per impedire l'instabilità del nome. Il *paratipo* è uno degli esemplari della serie originale che non è stato designato come olotipo o lectotipo: esso ha valore illustrativo ma non nomenclatoriale in senso stretto. L'*allotipo* designa, in alcune tradizioni, un esemplare del sesso opposto all'olotipo.

La struttura gerarchica di questa terminologia rivela la natura del problema che essa affronta: la necessità di stabilizzare il nome non per mezzo di un universale predicativo

ma per mezzo di una catena di riferimento che attraversa il tempo e le revisioni tassonomiche agganciandosi sempre, in ultima istanza, a un oggetto materiale concreto.

IV.3. Il paradosso del singolarissimo rappresentante dell'universale

La struttura filosofica del tipo nomenclatoriale è, come annunciato nell'introduzione a questo trattato, l'inverso preciso del generico matematico. Vale la pena di enunciare questa inversione con tutta la chiarezza possibile.

Il generico matematico — sia nel senso topologico di Baire, sia nel senso insiemistico di Cohen — è l'elemento che non appartiene ad alcun insieme eccezionale, che soddisfa tutte le proprietà che valgono per «quasi tutti» gli elementi della struttura, che è massimamente compatibile con l'intero sistema di predicati disponibili. Il generico è, in questo senso, il meno determinato individualmente — il meno «caratteristico» nel senso di non portare alcun tratto distintivo che lo escluda da qualsiasi categoria. Eppure questa assenza di tratti escludenti è precisamente la sua forza rappresentativa: esso rappresenta il «tutto» non perché sia tipico nel senso statistico, ma perché non è atipico in nessun senso strutturalmente definibile.

Il tipo nomenclatoriale è, al contrario, un individuo assolutamente concreto, singolare, determinato fino all'ultimo tratto morfologico: questo esemplare preciso, con questa sua ala spezzata, questo suo colore sbiadito dalla conservazione, questo suo parassita casualmente impigliato nelle setole, raccolto in questa data precisa da questo raccoglitore in questa località geografica specifica. Eppure questo individuo singolarissimo è il rappresentante nomenclatoriale della specie intera — un universale che può comprendere milioni di individui su tutto il pianeta, passati e futuri. La specie si chiama come si chiama *perché* questo individuo esiste in quel cassetto di museo.

Si tratta di una forma di rappresentazione che non è né quella logica (un individuo che soddisfa una proprietà universale) né quella statistica (un individuo che ha i valori medi della distribuzione), ma quella che si potrebbe chiamare *indicale* o *ostensiva*: il tipo dice «la specie è questa» mostrando un oggetto, non descrivendo una proprietà. La relazione tra il tipo e la specie è analoga alla relazione tra un campione e l'unità di misura nel Sistema Internazionale di misure: il metro era, fino al 2019, la lunghezza di un oggetto fisico preciso conservato a Sèvres; ora è definita in termini di costanti fisiche fondamentali, ma per secoli la sua identità era ancor essa indicale, legata a un singolo referente materiale.

IV.4. La filosofia del tipo: nominalismo, realismo, convenzionalismo

La pratica tassonomica del tipo solleva, in forma acuta, la questione filosofica dello statuto delle specie. Tre posizioni principali si contendono il campo, e ciascuna interpreta il tipo in modo diverso.

Per il *nominalismo delle specie* — la posizione che nega alle specie qualunque realtà al di là di quella dei singoli individui — il tipo è un puro strumento convenzionale: esso non «rappresenta» la specie in senso ontologicamente robusto perché la specie non esiste come entità reale; esistono solo individui, e la specie è il nome che diamo a un raggruppamento utile. Il tipo, in questa prospettiva, è un'etichetta ancorata a un individuo per ragioni di comodo comunicativo: esso fissa a cosa ci si riferisce quando si usa il nome, senza implicare che esista un'entità naturale unitaria corrispondente al nome.

Per il *realismo delle specie* — la posizione che attribuisce alle specie una realtà biologica propria, indipendente dalle nostre classificazioni — il tipo è il rappresentante (contingente ma necessario nella pratica) di un'entità che gli preesiste e che lo trascende. La specie *Homo sapiens* non è una costruzione convenzionale: è un lignaggio evolutivo con una storia propria, determinato da relazioni di discendenza comune, da flusso genico, da barriere riproduttive. Il tipo designa questo lignaggio in modo indicale — ne è un membro, non la sua definizione — e la specie continuerebbe a esistere come entità biologica anche se il tipo venisse distrutto; semplicemente, sarebbe necessario designarne un altro per stabilizzare il nome.

Una posizione intermedia — che si potrebbe chiamare *esternalismo nominalista* o *convenzionalismo causale* — è quella difesa da Saul Kripke e Hilary Putnam per i termini di generi naturali, che ha un'applicazione diretta al caso tassonomico. In questa prospettiva, i nomi di specie sono designatori rigidi: il nome *Homo sapiens* designa in ogni mondo possibile gli organismi che condividono la stessa «natura interna» (oggi interpretata in termini filogenetici e genetici) dei membri del ceppo originario al quale il nome fu applicato. L'olotipo non è il *definiens* della specie ma il *caposaldo causale* della catena di riferimento: il nome si trasmette di parlante in parlante, di biologo in biologo, mantenendo il contatto causale con la natura biologica degli organismi originariamente designati. La scoperta successiva della struttura molecolare, della storia filogenetica, dei meccanismi di speciazione non cambia il referente del nome: cambia la nostra conoscenza della natura interna di quel referente.

IV.5. Il tipo come anti-generico: la struttura della singolarità rappresentante

L'opposizione strutturale tra il generico matematico e il tipo biologico può essere articolata con maggiore precisione formale attraverso la nozione di *funzione di rappresentanza*.

Sia S una specie biologica, intesa come insieme (al momento dato) di tutti gli individui appartenenti a S: $S = \{s_1, s_2, ..., s , ...\}$. Una funzione di rappresentanza è una mappa $r : \mathscr{S} \to I$ che associa a ogni specie un individuo, dove $\mathscr{S}$ è l'insieme di tutte le specie e I è

l'insieme di tutti gli individui biologici (o dei loro resti conservati). La funzione di designazione del tipo tassonomico è precisamente questa: r(S) = t, dove t è l'olotipo di S.

La domanda filosoficamente rilevante è: quale proprietà deve soddisfare t per essere un buon rappresentante di S? La risposta del sistema nomenclatoriale è disarmante nella sua semplicità: nessuna in particolare, se non quella di essere stato così designato dall'autore originale della descrizione. Il tipo non è scelto perché è morfologicamente tipico (anzi, spesso gli autori originali avevano a disposizione un unico esemplare, e non avevano alternativa nella designazione); non è scelto perché ha i valori medi delle caratteristiche misurabili; non è scelto perché è il «migliore» esemplare della specie in qualche senso valutativo. È scelto — o più spesso, semplicemente *è* — perché è il primo individuo concreto cui il nome è stato formalmente associato in una pubblicazione validamente edita.

Questo aspetto del sistema nomenclatoriale rivela una scelta epistemologica radicale: la stabilità del riferimento è più importante della rappresentatività statistica del tipo. Un sistema che richiedesse al tipo di essere il «campione statisticamente tipico» della specie sarebbe intrinsecamente instabile: man mano che si conoscono meglio le popolazioni della specie, il «campione tipico» cambierebbe, e il tipo dovrebbe essere periodicamente sostituito. L'ancoraggio a un individuo storicamente determinato — con tutti i suoi tratti idiosincratici, con tutte le sue deformazioni, parassiti, anomalie — è il prezzo pagato per la stabilità del sistema.

Il generico matematico, all'opposto, è invariante rispetto a trasformazioni della struttura: esso è definito funzionalmente, come l'elemento che attraversa tutti gli insiemi densi, e questa definizione è robusta rispetto a cambiamenti della base del sistema predicativo. Il tipo biologico è invece contingente rispetto alla storia del processo di scoperta: esso dipende da chi ha trovato e descritto la specie per primo, in quale condizioni, con quale fortuna nel trovare un esemplare morfologicamente ben conservato.

IV.6. Il problema dell'equivocità del tipo: specie polimorfe, tipi aberranti e revisioni tassonomiche

La storia della tassonomia è ricca di casi in cui il tipo si rivela essere un esemplare eccezionale, aberrante rispetto alla variabilità tipica della specie, o addirittura appartenente a quella che le revisioni successive riconoscono come una specie diversa. Questi casi mettono alla prova la tenuta filosifica del sistema.

Un caso paradigmatico è quello delle specie descritte su esemplari anomali: un esemplare albino designato come olotipo di una specie di uccello normalmente pigmentata; un esemplare teratologico (con malformazioni congenite) designato come tipo di un insetto; un esemplare giovane, con morfologia larvale, designato come tipo di una specie che cambia radicalmente aspetto durante lo sviluppo postembriogenico. In tutti questi casi, il tipo è il *meno generico* degli esemplari possibili nel senso

matematico: esso appartiene a un insieme eccezionale (gli albini, i teratologici, i giovani) che rappresenta solo una piccola frazione della specie.

Il sistema nomenclatoriale risolve queste situazioni non sostituendo il tipo — che rimane il tipo, per quanto aberrante — ma ammettendo che la diagnosi della specie, la sua definizione morfologica, può essere indipendente dal tipo. Il tipo è l'ancoraggio nomenclatoriale, non la definizione biologica: esso dice *a quale specie ci riferiamo* ma non dice *cos'è quella specie*. Questa distinzione — tra la funzione di riferimento e la funzione definitoria del tipo — è filosoficamente fondamentale.

Essa implica che il sistema nomenclatoriale opera con una separazione netta tra la *designazione* (chi è il referente del nome?) e la *descrizione* (quali caratteristiche ha il referente?). La designazione è fissata storicamente, per atto indicale, e non cambia con il progresso della conoscenza. La descrizione è revisabile indefinitamente: man mano che si sa di più sulla specie, la sua diagnosi morfologica, fisiologica, molecolare, filogenetica viene aggiornata. Ma il nome rimane lo stesso, perché rimane lo stesso il referente indicale.

IV.7. Il tipo come «campione del metro»: analogia epistemologica

L'analogia con il campione del metro — a cui si è accennato sopra — merita di essere approfondita, perché illumina sia la forza sia i limiti della strategia indicale nella biologia sistematica.

Wittgenstein, nelle *Ricerche filosofiche* (§50), discute l'esempio del metro di Parigi — la sbarra platinata conservata a Sèvres che era (fino alla ridefinizone del 2019 in termini di frequenza della luce) *il* metro. Di questa sbarra, Wittgenstein nota, non si può dire né che è lunga un metro né che non è lunga un metro: essa è il campione con cui si misurano le lunghezze, non un oggetto misurato. Essa non ha lunghezza nel senso convenzionale, non perché non sia un oggetto fisico esteso, ma perché il linguaggio della misurazione non si applica a ciò che è il fondamento della misurazione stessa.

Analogamente, dell'olotipo di una specie non si può propriamente dire che è un buon o un cattivo rappresentante della specie: esso è il campione in relazione al quale il concetto di «appartenenza alla specie» — almeno nel senso nomenclatoriale — è definito. Esso è il fondamento del sistema, e il sistema non può applicarsi a se stesso per valutarlo. Il tipo è al di là della distinzione tra rappresentativo e non-rappresentativo, perché è il punto zero del sistema di riferimento.

Ma l'analogia si ferma qui. Il campione del metro era l'unico esemplare delle sue dimensioni precise; qualunque sbarra più o meno lunga era distinguibile da esso. L'olotipo, al contrario, è immerso in una popolazione di individui conspecifici con cui condivide quasi tutte le caratteristiche essenziali: non è distinguibile *a priori* dagli altri individui della specie, se non per il fatto storico dell'essere stato designato. La relazione

di designazione non è scritta nella natura dell'individuo, ma nell'atto umano e istituzionale della descrizione originale.

Questo introduce una dimensione pragmatica e storica nella struttura ontologica del tipo che non ha un analogo nell'epistemologia della misura: il tipo è tale in virtù di un atto comunicativo — la pubblicazione della descrizione originale — inserito in una rete istituzionale — i codici internazionali di nomenclatura — sostenuto da infrastrutture materiali — i musei, gli erbari, i cataloghi. La sua capacità di fungere da ancora nomenclatoriale dipende dall'integrità di questa rete, non solo dalla sua struttura ontologica individuale.

IV.8. Il tipo e il generico: opposizione e complementarità

L'opposizione tra il tipo nomenclatoriale e il generico matematico non è meramente decorativa, né è soltanto un gioco di parole attorno al termine «generico». Essa rivela due strategie epistemologiche profondamente diverse per risolvere il medesimo problema: come ancorare un nome universale — il nome di una specie, il nome di una proprietà che vale «quasi ovunque» — a qualcosa di determinato?

La strategia del generico matematico risponde: si ancora il nome universale non a un individuo ma a una *procedura* — la procedura di attraversamento di tutti gli insiemi densi. Il generico non è un individuo particolare tra gli altri: è il limite ideale di un processo di selezione che non esclude mai nulla di ciò che il sistema riconosce come inevitabile. Non è un oggetto fisico concreto ma un oggetto funzionale, definito dalle relazioni che intrattiene con l'intera struttura.

La strategia del tipo nomenclatoriale risponde: si ancora il nome universale a *questo* individuo, in questa data, in questo museo. Il tipo non è definito funzionalmente ma indicalmente: è quell'oggetto, non per le proprietà che possiede, ma per il fatto storico di essere stato il primo oggetto concreto a cui il nome è stato associato. La sua determinazione è massima — è il più concreto degli individui, non il più astratto — e questa massima concretezza è ciò che lo rende capace di stabilizzare il riferimento attraverso tutte le revisioni predicative successive.

Si tratta, in effetti, di due soluzioni al medesimo problema dell'*eccedenza delle revisioni predicative*: entrambe riconoscono che i predicati disponibili in un dato momento sono insufficienti a fissare definitivamente il riferimento di un nome universale, e cercano un'ancora al di là dei predicati — l'una attraverso la struttura funzionale dell'attraversamento massimale (il generico), l'altra attraverso la struttura indicale dell'atto ostensivo (il tipo).

La complementarità profonda di queste due strategie suggerisce che il problema dell'ancoraggio dell'universale — di come dare stabilità a un nome che si vuole applicabile a un'intera classe di oggetti — ha una struttura biforcata, con due soluzioni duali: una che va verso il meno determinato individualmente (il generico) e una che va

verso il più determinato individualmente (il tipo). Entrambe, in modi opposti, fuggono dalla definizione predicativa come fondamento del riferimento. Entrambe trovano l'ancoraggio dell'universale non *nella* predicazione ma *ai suoi margini*: il generico ai margini superiori, là dove la predicazione si fa esaustiva e il filtro attraversa tutto; il tipo ai margini inferiori, là dove la predicazione inizia, nella singolarità irriducibile del primo oggetto toccato.

Questa struttura duale — che emerge dal confronto tra la teoria dei modelli e la sistematica biologica — costituisce uno dei risultati più significativi di questo trattato: la dimostrazione che il problema dell'universale, nella sua versione formalmente più precisa, ammette due soluzioni strutturalmente opposte e tuttavia analoghe nella loro strategia di fuga dalla predicazione. Nell'ultimo capitolo, la filosofia del linguaggio ci offrirà un terzo polo — il *generic statement* — che si colloca in uno spazio intermedio e intreccia le due strategie in una sintesi parziale e problematica.

V. I Generic Statements: la Logica dell'Enunciato Generico

V.1. Il problema e la sua pertinacia

«Gli uccelli volano.» «I cani mordono.» «I leoni hanno la criniera.» «Le zanzare trasmettono la malaria.» «Il coccodrillo è rettile.» Questi enunciati — che la logica e la filosofia del linguaggio anglosassone riuniscono sotto l'etichetta di *generic statements*, o più brevemente *generics* — appartengono al nucleo più ordinario del discorso quotidiano e scientifico. Eppure essi oppongono una resistenza straordinaria a ogni tentativo di analisi semantica sistematica, resistenza che ha alimentato una delle discussioni più vivaci e tecnicamente raffinate della filosofia del linguaggio degli ultimi quarant'anni.

La difficoltà non è superficiale. Non si tratta di un caso limite, di una bizzarria lessicale o di un'eccezione localizzata: i generici sono onnipresenti nel discorso umano, dalla conversazione familiare al trattato scientifico, dall'articolo di giornale alla sentenza giuridica. La loro analisi tocca questioni fondamentali sulla struttura della predicazione, sulla natura della generalizzazione, sul rapporto tra il linguaggio e la realtà biologica e sociale, sulle basi cognitive della categorizzazione. E la loro resistenza tecnica è precisa: ogni schema di analisi proposto cattura alcuni casi e ne lascia sfuggire altri; ogni regola sembra avere eccezioni sistematiche; ogni formalismo si rivela inadeguato in situazioni che a prima vista appaiono del tutto analoghe a quelle che riesce a trattare.

Il problema centrale è la *logica di verità* dei generici: in quali condizioni un enunciato generico è vero? La risposta intuitiva — un generico è vero se la proprietà predicata vale per la maggioranza (o la quasi totalità) degli individui del soggetto — è immediatamente smentita da una serie di controesempi che mostrano come la

struttura logica dei generici sfidi sia l'analisi quantificazionale universale, sia quella esistenziale, sia qualunque analisi basata su soglie statistiche.

V.2. Il fallimento delle analisi quantificazionali standard

L'analisi più naturale di un enunciato come «gli uccelli volano» è quella in termini di quantificazione universale: $\forall x(\text{Uccello}(x) \rightarrow \text{Vola}(x))$. Ma questa analisi è palesemente errata. Gli uccelli che non volano esistono: i pinguini sono uccelli e non volano; gli struzzi sono uccelli e non volano; i kiwi sono uccelli e non volano. Anzi, le femmine di molte specie dimorfiche hanno capacità di volo ridotte rispetto ai maschi; gli uccelli appena nati non volano; gli uccelli con ali spezzate non volano. La quantificazione universale rende falso «gli uccelli volano» per la presenza di queste eccezioni, eppure l'enunciato ci sembra indubitabilmente vero nel modo in cui normalmente lo intendiamo.

Il primo tentativo di uscita è la quantificazione generica con un operatore di normalità: $\forall x(\text{Uccello}(x) \wedge \text{Normale}(x) \rightarrow \text{Vola}(x))$, dove «normale» esclude i casi eccezionali (pinguini, struzzi, individui feriti). Ma questa mossa genera un regresso: chi decide cosa è normale? Se «normale» significa «non appartenente alle specie che non volano», si ottiene una circolarità evidente — si presuppone già di sapere quali specie sono eccezioni, il che è esattamente ciò che si dovrebbe derivare dall'analisi. Se «normale» è un parametro contestuale, si ottiene un'analisi indicizzata al contesto che non dice nulla sulla struttura semantica intrinseca del generico.

Il secondo tentativo è la quantificazione sulla maggioranza: «gli uccelli volano» significa «la maggioranza degli uccelli vola». Ma anche questa analisi è immediatamente falsificata. «Le zanzare trasmettono la malaria» è un enunciato generico vero, benché la maggioranza schiacciante delle zanzare non trasmetta mai la malaria nel corso della propria vita — solo una minoranza di individui di specie vettrici, in zone endemiche, è in grado di trasmettere il parassita. «I fumatori muoiono di cancro al polmone» è considerato vero come generico, benché la maggioranza dei fumatori non muoia di cancro al polmone. Al contrario, «gli esseri umani hanno il cuore» è vero come generico, ma la percentuale di individui con cuore è così alta che qualunque analisi basata sulla maggioranza sarebbe soddisfatta. Il punto è che la soglia statistica richiesta varia enormemente da un generico all'altro, in modo che sembra dipendere non dalla struttura logica dell'enunciato ma da fattori extralinguistici legati alla natura della proprietà predicata.

Una terza variante è l'analisi probabilistica: «gli uccelli volano» significa «la probabilità che un uccello scelto a caso voli è alta». Ma anche qui il problema si ripresenta: «le zanzare trasmettono la malaria» rimane vero come generico con una probabilità bassa associata.

V.3. L'operatore GEN e le analisi tripartite

La risposta più influente al fallimento delle analisi quantificazionali standard è stata l'introduzione di un operatore semantico primitivo — l'operatore **GEN** — che lega una variabile in modo irreducibilmente distinto dalla quantificazione universale e esistenziale. Questa proposta, elaborata indipendentemente da diversi semanticisti a partire dagli anni Ottanta (tra cui Gregory Carlson, Gennaro Chierchia, e i collaboratori del volume *The Generic Book* del 1995), assimila i generici agli enunciati condizionali con operatori adici, cioè agli enunciati che coinvolgono quantificazione sopra situazioni o mondi possibili.

La struttura logica di base è tripartita:

GEN [x; φ(x); ψ(x)]

dove la variabile x è ristretta dalle condizioni nella parte φ (detta *restrictor*) e la proprietà è predicata nella parte ψ. La lettura è approssimativamente: «genericamente, per un x che soddisfa φ, vale anche ψ». L'operatore **GEN** è un quantificatore generalizzato di un tipo speciale: esso non quantifica sugli individui dell'estensione del predicato, ma sulle *situazioni* o sui *casi* in cui il predicato si applica, e stabilisce che la proprietà vale nelle situazioni normali, tipiche, stereotipali.

Formalmente, in una semantica a situazioni (o a mondi possibili), si può scrivere:

GEN[s; Sit-Uccello(s); $\exists$ x $\in$ s, Uccello(x) $\wedge$ Vola(x)]

dove la quantificazione va su situazioni s in cui compaiono uccelli, e si afferma che nelle situazioni tipiche (generiche) un uccello vola. L'avverbio «tipiche» è il punto critico: l'analisi tripartita rimanda a una nozione di normalità o tipicità delle situazioni che deve essere fornita exogenamente — o da una teoria della prototipicità cognitiva, o da una semantica dei mondi normali, o da una pragmatica del contesto.

La semantica dei *mondi normali* (Lewis, Kratzer, e successori) elabora questa idea nel modo seguente. Si definisce, per ogni specie o categoria di oggetti, un ordinamento di similarità sui mondi possibili che identifica i «mondi in cui le cose vanno come ci si aspetta» per quella categoria. Un generico «gli F sono G» è vero nel mondo reale se e solo se nei mondi normali per F — i mondi più vicini al mondo reale in cui un F esiste in condizioni tipiche — l'individuo F in questione è anche G. Gli struzzi e i pinguini non esistono (o non hanno le caratteristiche rilevanti) nei mondi normali per «uccello»: il concetto di uccello seleziona mondi in cui l'uccello-prototipico vola.

Questa analisi ha una forza notevole: rende conto dell'asimmetria statistica tra generici veri con bassa frequenza («le zanzare trasmettono la malaria») e generici falsi con alta frequenza (il problema degli struzzi). La chiave è che la selezione dei mondi normali non è semplicemente proporzionale alla frequenza statistica degli individui: essa è sensibile alla struttura funzionale, biologica, o teleologica della categoria. Volare è parte della struttura funzionale tipica di un uccello, anche se numericamente molte specie non volano; la trasmissione del patogeno è la proprietà *rilevante* della zanzara-vettore in certi contesti, anche se numericamente rara.

V.4. Il problema della normalità e la sua dipendenza dalla categoria

Il punto più sottile e filosoficamente interessante emerge quando si cerca di rendere esplicita la struttura dei «mondi normali» o delle «situazioni tipiche». Si scopre che la normalità non è una nozione unitaria ma dipende in modo cruciale dalla *prospettiva categoriale* adottata.

Consideriamo la coppia: «i mammiferi allattano i propri piccoli» e «i mammiferi maschi allattano i propri piccoli». Il primo generico è vero; il secondo è falso. Eppure «i mammiferi maschi» è una sottocategoria dei «mammiferi», e i mondi normali per i mammiferi maschi sembrerebbero dover essere un sottoinsieme dei mondi normali per i mammiferi. La falsità del secondo generico non si spiega riducendo i mondi normali dei «mammiferi maschi» a quelli dei «mammiferi»: occorre riconoscere che la categoria «mammiferi maschi» ha una propria struttura di normalità interna — e in essa, non allattare è la norma.

Questo problema — che Sarah-Jane Leslie ha chiamato il *problema della sensibilità alla categoria* — suggerisce che la normalità appropriata per valutare un generico è sempre relativa alla categoria grammaticale del soggetto dell'enunciato, non a qualche nozione di normalità assoluta o all'insieme di tutti i mondi normali per la categoria in senso pieno. La scelta della categoria determina quale struttura di normalità è pertinente, e questa struttura di normalità determina il valore di verità del generico.

La dipendenza dalla categoria introduce una riflessività che ricorda da vicino la struttura della genericità matematica: come il generico insiemistico è definito relativamente a un modello M (è M-generico, non generico in senso assoluto), il generic statement è vero o falso relativamente a una struttura di normalità determinata dalla categoria del soggetto. La relatività al contesto categoriale non è una debolezza dell'analisi: è un riflesso fedele della struttura semantica del fenomeno.

V.5. Il problema delle eccezioni intrinseche: la distinzione di Leslie

Sarah-Jane Leslie, nel suo lavoro sulla semantica dei generici (2007, 2008), ha proposto una delle analisi più sistematiche e filosoficamente ambiziose disponibili nella letteratura. Ella identifica un fattore determinante nella valutazione dei generici che le analisi precedenti avevano sottostimato: la struttura della proprietà predicata, e in particolare la distinzione tra proprietà *caratteristiche* e proprietà *accidentali* (o *storiche*).

Una proprietà è caratteristica per una categoria se essa è parte della struttura biologica, funzionale, o teleologica tipica dei membri della categoria — se è, in qualche senso, parte di «cosa significa essere» un membro di quella categoria. Una proprietà è accidentale o storica se dipende da circostanze contingenti, ambientali, storiche, che non fanno parte della struttura intrinseca della categoria.

Leslie propone che i generici con proprietà caratteristiche siano veri anche con frequenza molto bassa (la trasmissione della malaria è caratteristica delle zanzare-vettore, non accidentale), mentre i generici con proprietà accidentali richiedano frequenze più alte per essere veri. Ma la distinzione più cruciale che Leslie introduce riguarda le proprietà *striking* — le proprietà psicologicamente salienti, pericolose, o rilevatrici di natura: «i requin attaccano i bagnanti», «i pitbull mordono i bambini». Questi generici possono essere veri anche con frequenze bassissime e senza alcun supporto funzionale o biologico profondo: basta che la proprietà sia psicologicamente saliente e che venga associata alla categoria in modo stabile in una comunità.

Questo aspetto dell'analisi di Leslie ha implicazioni che vanno oltre la semantica tecnica e toccano la filosofia sociale e la questione dei pregiudizi. Gli enunciati generici che predicano proprietà salienti negative di categorie sociali — razziali, di genere, di orientamento — funzionano come meccanismi di essenzializzazione: «gli immigrati rubano», «le donne sono irrazionali», «i gay sono promiscui». Questi enunciati possono essere percepiti come veri da chi li produce e riceve, anche in presenza di frequenze statistiche basse o nulle, perché la struttura semantica dei generici non richiede supporto statistico alto per le proprietà salienti. Il generico, in quanto forma linguistica, è uno strumento particolarmente potente — e pericoloso — di trasmissione di stereotipi, perché maschera affermazioni statisticamente dubbie sotto la forma logica di generalizzazioni «naturali».

V.6. I generici e il problema della quantificazione non-restrittiva

Un aspetto ulteriore, tecnicamente raffinato, riguarda la distinzione tra generici che quantificano sopra gli *individui* della categoria (detti *I-level generics*, da individual-level) e generici che quantificano sopra *stadi temporali* o *occasioni* degli individui (detti *S-level generics*, da stage-level). Questa distinzione, introdotta da Gregory Carlson nella sua tesi di dottorato del 1977 e diventata un pilastro della semantica lessicale, ha conseguenze profonde per l'analisi dei generici.

Un *I-level predicate* è un predicato che si applica a un individuo in modo stabile, indipendente da situazioni e contesti: «essere mammifero», «essere intelligente», «essere alto». Un *S-level predicate* si applica a stadi temporali o situazionali dell'individuo: «essere disponibile», «essere ubriaco», «correre». La distinzione non è puramente lessicale ma è rilevata da una serie di diagnostica sintattica e semantica. Gli I-level predicates non ammettono facilmente modificatori di luogo posizionale (non si può dire *«Mario è intelligente in cucina»* con lo stesso significato di *«Mario è disponibile in cucina»*); gli S-level predicates interagiscono diversamente con i quantificatori di situazioni impliciti.

Nel caso dei generici, questa distinzione produce un'asimmetria notevole. Un generico con predicato I-level — «gli italiani sono mediterranei» — afferma una proprietà stabile della categoria e non tollera eccezioni nel senso rilevante: un italiano che non fosse mediterraneo (geograficamente, geneticamente, culturalmente nel senso rilevante

al contesto) sembrerebbe falsificare l'enunciato più facilmente. Un generico con predicato S-level — «gli italiani mangiano la pasta» — afferma una generalizzazione sugli *stadi* tipici degli italiani — sulle loro occasioni di pasto — e tollera eccezioni individuali più facilmente: ogni singolo italiano può non mangiare pasta in ogni singola occasione, e l'enunciato rimane vero.

Questa distinzione ha una ricaduta sulla struttura formale dell'operatore **GEN**. Nell'analisi tripartita, i generici I-level hanno una struttura approssimativamente:

GEN [x; Italiano(x); Mediterraneo(x)]

mentre i generici S-level hanno una struttura:

GEN [⟨x, s⟩; Italiano(x) ∧ Situazione-di-pasto(s, x); Mangia-pasta(x, s)]

dove la quantificazione va su coppie individuo-situazione piuttosto che solo su individui. L'operatore **GEN** nel secondo caso quantifica in modo implicito su situazioni, e questa quantificazione su situazioni è la fonte dell'ulteriore flessibilità nella tolleranza delle eccezioni.

V.7. La connessione con la genericità matematica: struttura analoga, non identica

A questo punto della trattazione è possibile tracciare i contorni dell'analogia strutturale tra il *generic statement* della filosofia del linguaggio e il generico della teoria dei modelli, precisando al tempo stesso i punti in cui l'analogia si interrompe.

La struttura comune è quella del «quasi tutti» non statistico: sia il generico insiemistico sia il generic statement predicano una proprietà che vale in modo non accidentale, non statisticamente maggioritario nel senso bruto della frequenza, ma strutturalmente associata alla categoria o alla struttura in questione. In entrambi i casi, la chiave è una nozione di *inevitabilità strutturale* delle proprietà rilevanti: il filtro generico attraversa tutti gli insiemi densi perché sono *strutturalmente densi* in P, non perché siano numericamente abbondanti; il generico linguistico è vero quando la proprietà è caratteristica o striking per la categoria, non quando è statisticamente frequente.

La differenza fondamentale è la presenza, nel caso linguistico, di una componente *psicologica* e *pragmatica* che non ha analogo nella struttura matematica pura. La normalità dei «mondi normali» per un generico linguistico non è definita in termini di struttura formale di una nozione di forcing, ma dipende da fattori cognitivi (la salienza, la caratteristicità percepita, lo stereotipo di categoria) e pragmatici (il contesto discorsivo, le presupposizioni condivise, la pertinenza conversazionale). Il generico matematico è definito in termini puramente estensionali — le proprietà degli insiemi densi sono proprietà formali di sottoinsiemi del parziale ordine — mentre il generic statement linguistico è irriducibilmente intensionale e contestuale.

Un ulteriore punto di contrasto riguarda la direzione dell'analisi. Il generico matematico è un oggetto — un filtro, un elemento di uno spazio, un punto generico di uno schema — e la sua genericità è una proprietà che esso possiede in virtù delle relazioni che intrattiene con la struttura. Il generic statement linguistico è un enunciato — una struttura sintattico-semantica — e la sua verità è determinata dalle proprietà semantiche delle espressioni che lo compongono, non da quelle di un oggetto denotato. La genericità nel senso matematico è una proprietà *ontologica* di oggetti; la genericità nel senso linguistico è una proprietà *semantica* di enunciati.

Ciò non di meno, l'analogia strutturale è illuminante. In entrambi i casi, la «quasi totalità» che caratterizza la proprietà è definita non in termini di cardinalità o misura, ma in termini di struttura: è il «quasi tutti gli insiemi densi» della topologia di Baire, oppure il «quasi tutte le situazioni normali» della semantica dei generici. In entrambi i casi, questa struttura è relativa — relativa a un parziale ordine nel caso matematico, relativa a una struttura di normalità categoriale nel caso linguistico — e non assoluta. E in entrambi i casi, questa relativizzazione non è un difetto ma è la forma precisa del fenomeno: la genericità non è un concetto assoluto ma è sempre la genericità *rispetto a* qualcosa.

V.8. I generici nelle scienze: leggi, disposizioni e generalizzazioni accidentali

Prima di concludere il capitolo, è opportuno affrontare il problema dei generici nel discorso scientifico, che ha implicazioni specifiche per la filosofia della scienza e per la comprensione del rapporto tra generalizzazioni scientifiche e struttura logica.

Le leggi di natura — nella formulazione standard della filosofia della scienza del Novecento — si distinguono dalle *generalizzazioni accidentali* per una serie di criteri: il supporto controfattuale (la legge supporta il corrispondente controfattuale; la generalizzazione accidentale no), la necessità nomologica (la legge non è solo vera ma necessariamente vera in qualche senso di necessità più forte di quella logica), la proiettabilità (la legge può essere usata per predire casi non ancora osservati; la generalizzazione accidentale, no). «I metalli si dilatano per calore» è una legge; «tutte le monete nel mio portafoglio sono di rame» è una generalizzazione accidentale.

I generici scientifici si collocano in una zona intermedia. «I mammiferi sono a sangue caldo», «i geni sono fatti di DNA», «il ferro è solubile in acido cloridrico» sono enunciati che hanno la struttura sintattica dei generici ma che nell'uso scientifico funzionano come leggi o disposizioni: essi supportano controfattuali, sono proiettabili, e riflettono strutture causali reali piuttosto che mere regolarità statistiche. La filosofia della scienza contemporanea, a partire dal lavoro di Sydney Shoemaker e delle sue analisi sulle disposizioni, tende a interpretare tali generici come enunciati sulle *disposizioni* delle entità naturali: il ferro è *disposto* a dissolversi nell'acido cloridrico anche quando non è immerso in esso, e questa disposizione è parte della sua struttura interna come sostanza chimica.

I generici disposizionali hanno una struttura logica che si avvicina ancora di più al generico matematico: la disposizione è una proprietà *modale* — vale non solo nel caso attuale ma in tutti i casi normali, in tutti i mondi in cui le condizioni di attivazione sono soddisfatte — e questa modalità è definita per rapporto a una struttura di leggi naturali o di meccanismi causali, non per rapporto a statistiche di frequenza. Un pezzo di ferro che non è mai stato immerso nell'acido è comunque solubile: la sua solubilità non è ridotta dalla rarità o dall'assenza di casi di dissoluzione effettiva.

Qui la connessione con la genericità topologica di Baire si fa più diretta. Una disposizione è vera *genericamente* — nel senso che vale per «quasi tutti» i casi rilevanti in una struttura di meccanismi causali — non nel senso statistico ma nel senso strutturale: essa è vera in tutti i mondi appartenenti a un insieme residuale di situazioni, dove la residualità è definita non topologicamente ma causalmente-nomologicamente. La struttura è analoga: il generico è ciò che non appartiene ad alcun insieme eccezionale definito dalla struttura (meccanismi causali, leggi naturali, struttura biologica), e questo «non appartenere agli eccezionali» è la forma precisa della sua verità.

V.9. Il generic statement come terzo polo della genericità

Il percorso compiuto attraverso i cinque capitoli di questo trattato converge ora verso una visione articolata del concetto di genericità come *famiglia di nozioni strutturalmente imparentate*. Il generic statement della filosofia del linguaggio costituisce il terzo polo di questa famiglia, dopo il generico topologico-insiemistico e il tipo nomenclatoriale della biologia sistematica.

Il generic statement si situa tra il polo del generico matematico e il polo del tipo. Come il generico matematico, esso predica una proprietà che non è ridotta a una statistica di frequenza ma si rapporta a una struttura di normalità o inevitabilità; come il tipo, esso è sensibile a fattori contestuali, categoriali, e storici che dipendono dalla natura concreta delle categorie di oggetti di cui si parla, non da astratte strutture formali. Il generic statement è, in qualche modo, il tentativo del linguaggio naturale di fare ciò che il generico matematico fa formalmente: predicare in modo strutturale, non statistico, cogliendo le proprietà che una categoria porta in sé per natura piuttosto che per accidente.

Ma il generic statement è anche il luogo dove la genericità si rivela più esposta ai rischi di una formalizzazione inadeguata: dove la potenza naturalizzante del «quasi tutti» non statistico può essere mobilitata per produrre generalizzazioni stereotipali, rinforzare pregiudizi, essenzializzare categorie sociali costruite. Il generico matematico è neutro rispetto a questi rischi — è una struttura formale priva di contenuto assiologico — ma il generic statement, operando nel linguaggio naturale con categorie che hanno storia, potere, e carica normativa, non è mai neutro. La filosofia del linguaggio che analizza i generici non può dunque limitarsi alla semantica formale: deve aprirsi alle implicazioni

sociali, epistemologiche, e normative di questa forma linguistica così pervasiva e così potente.

È questo l'ultimo passo che il saggio dovrà compiere nel capitolo conclusivo: la sintesi delle tre nozioni di genericità, la struttura comune che le attraversa, e le conseguenze filosofiche di questa struttura per la comprensione del rapporto tra universalità, determinazione, e linguaggio.

VI. Sintesi: la Struttura Trasversale della Genericità

VI.1. Il filo conduttore: tre nozioni, una struttura

Il percorso percorso in questo trattato ha attraversato domini che sembrano, a prima vista, distanti e incommensurabili: la topologia e il teorema di categoria di Baire, la teoria degli insiemi e il forcing coheniano, la filosofia ontologica di Alain Badiou, la biologia sistematica e il tipo nomenclatoriale linneano, la filosofia del linguaggio e la semantica dei generic statements. Eppure a ogni svolta di questo percorso è affiorata, con persistenza significativa, una medesima struttura di fondo. È tempo di articolarla esplicitamente, di valutarne la portata, e di trarre le conseguenze filosofiche che essa autorizza.

La struttura è la seguente. In ciascuno dei domini considerati, la nozione di genericità sorge dall'incontro tra una struttura — un insieme ordinato, uno spazio topologico, un modello insiemistico, un sistema di classificazione biologica, una rete di categorie semantiche — e il problema di designare *ciò che non è eccezionale rispetto a quella struttura*. Il generico è sempre il residuo di tutte le eccezioni possibili: è ciò che sopravvive a ogni tentativo di relegarlo in un sottoinsieme speciale. E questo residuo ha, in tutti i casi, una doppia caratteristica apparentemente paradossale: esso è più ricco determinativamente degli oggetti ordinari (soddisfa tutte le proprietà che valgono generalmente, attraversa tutti gli insiemi densi), e al tempo stesso non è catturabile dall'interno della struttura attraverso un predicato definito da quella struttura stessa.

Il generico è l'eccedenza interna della struttura: è ciò che la struttura *dovrebbe* contenere per essere completa, ma che non riesce a costruire con le proprie risorse di nominazione. Esso è il punto dove la struttura incontra il proprio limite non come interruzione brusca, non come muro improvviso, ma come *orizzonte sempre arretrantesi* man mano che si costruisce, si definisce, si articola. La completezza del sistema — la completezza metrica nel caso di Baire, la saturazione del modello nel caso del forcing, la chiusura dell'enciclopedia nel caso di Badiou, la totalità della classificazione sistematica nel caso del tipo, la struttura dei mondi normali nel caso del generic statement — è la condizione di possibilità del generico, non la sua negazione.

VI.2. La forma logica comune: definibilità e trascendenza interna

L'articolazione più precisa di questa struttura comune può essere tentata attraverso la nozione di *definibilità relativa*, che attraversa in modo trasversale tutti i domini considerati.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio formale (o naturale, nel caso dei generics), $\mathcal{M}$ una struttura (uno spazio topologico, un modello insiemistico, un sistema categoriale). Un sottoinsieme $A \subseteq \mathcal{M}$ è *$\mathcal{L}$-definibile in $\mathcal{M}$* se esiste una formula $\varphi(x)$ del linguaggio $\mathcal{L}$ tale che $A = \{a \in \mathcal{M} : \mathcal{M} \vDash \varphi(a)\}$. La classe di tutti i sottoinsiemi $\mathcal{L}$-definibili in $\mathcal{M}$ forma l'*enciclopedia* — nel senso badiousiano — o il *sistema di predicazione disponibile* di $\mathcal{M}$.

Un elemento g è *generico rispetto a $\mathcal{M}$ e $\mathcal{L}$* se g non appartiene ad alcun sottoinsieme «eccezionale» che sia $\mathcal{L}$-definibile in $\mathcal{M}$. Nella topologia di Baire: g è generico se non appartiene ad alcun insieme magro definibile (i.e., g appartiene all'intersezione di tutti gli aperti densi che siano costruibili nel sistema). Nel forcing: g è M-generico se non appartiene ad alcun insieme denso di M che abbia un nome in M. Nel sistema semantico dei generics: l'affermazione generica «gli F sono G» è vera se G non è eccezionale rispetto alla struttura di normalità della categoria F, dove la normalità è determinata dai predicati disponibili nel sistema categoriale dato.

Questa struttura ha una proprietà caratteristica che può essere formulata come un piccolo teorema informale di trasversalità:

Se g è genuinamente generico rispetto a $\mathcal{M}$ e $\mathcal{L}$, allora g non è $\mathcal{L}$-definibile in $\mathcal{M}$.

La dimostrazione — formale nei casi matematici, strutturalmente analoga negli altri — è sempre diagonale. Supponiamo che g sia $\mathcal{L}$-definibile in $\mathcal{M}$: allora g è il valore di qualche formula $\varphi(x)$, e l'insieme $\{a \in \mathcal{M} : \neg\varphi(a)\} = \mathcal{M} \setminus \{g\}$ è $\mathcal{L}$-definibile in $\mathcal{M}$. Se questo insieme è eccezionale (magro, denso, rilevante per la struttura di normalità), g vi deve appartenere per generalizzazione, contraddicendo il fatto di essere g stesso. Nei casi in cui l'insieme $\mathcal{M} \setminus \{g\}$ è eccezionale, la genericità di g è contraddetta dalla sua stessa definibilità. Nei casi in cui non lo è, la definibilità di g non contraddice la genericità, ma la genericità stessa impone che nessun insieme eccezionale possa «nominare» g come unico elemento residuo.

Questo teorema di trasversalità formalizza, nella maniera più precisa disponibile, il senso in cui il generico è *inclassificabile*: non nel senso vago che sia difficile da classificare, non nel senso romantico che sfugga a ogni sistema, ma nel senso tecnico e preciso che nessun predicato del linguaggio della struttura può isolarlo come unico elemento di un insieme eccezionale.

VI.3. Il paradosso della nominazione: come parlare del generico?

Questa struttura genera immediatamente un problema filosofico di grande importanza: se il generico non è definibile dall'interno della struttura, come è possibile parlarne? Come è possibile scrivere questo trattato — come è possibile usare la parola «generico» per designare qualcosa di preciso — se il generico, per definizione, sfugge a ogni designazione interna?

La risposta a questa domanda richiede di distinguere con cura due tipi di discorso. C'è il discorso che parla *dall'interno della struttura* — le affermazioni che usano le risorse di $\mathcal{L}$ per descrivere oggetti di $\mathcal{M}$ — e c'è il discorso che parla *sulla struttura* — la metalinguistica, la metamatematica, la riflessione filosofica che prende la struttura intera come proprio oggetto. Il generico è invisibile al primo tipo di discorso — non è nominabile dall'interno — ma è perfettamente visibile al secondo: esso è esattamente ciò che si designa quando si parla della struttura dall'esterno, quando si descrive la costruzione del filtro generico come procedura che attraversa tutti gli insiemi densi, quando si caratterizza la posizione funzionale del punto generico nella topologia di Zariski.

Il linguaggio che usa Cohen per costruire e descrivere il filtro generico non è il linguaggio di M — è il linguaggio del matematico che osserva M dall'esterno. Il linguaggio che usa il filosofo per caratterizzare la struttura del generic statement non è il generic statement stesso — è il metalinguaggio semantico. Il linguaggio del presente trattato non è il linguaggio della struttura di cui parla — è il linguaggio della riflessione filosofica che prende quella struttura come oggetto.

Questa distinzione — tra linguaggio oggetto e metalinguaggio — che Tarski ha reso esplicita e formalmente precisa per la teoria della verità, è strutturalmente connessa alla problematica della genericità. In entrambi i casi, si tratta di riconoscere che un sistema sufficientemente potente non può pienamente riflettere su se stesso — che la riflessione completa richiede uno spostamento di livello, un'uscita dalla struttura verso la prospettiva che la contempla. Il teorema di incompletezza di Gödel, la non-definibilità della verità di Tarski, l'impossibilità di costruire il filtro generico dall'interno di M: sono tre manifestazioni della medesima struttura di autoreferenziale trascendenza interna che si ripresenta in ogni sistema sufficientemente espressivo.

VI.4. Genericità e universalità: una ridefinizione

I tre poli della genericità considerati in questo trattato — il generico matematico, il tipo biologico, il generic statement linguistico — convergono, pur nelle loro differenze, verso una ridefinizione del concetto di universalità che merece di essere formulata esplicitamente.

L'universale classico — nella tradizione aristotelica, nella logica predicativa standard, nella semantica delle classi — è ciò che vale *per tutti* i membri di una categoria: è una proprietà che, quando predica di un individuo, afferma che quell'individuo appartiene all'estensione del predicato universale. Il quantificatore universale $\forall x\, \varphi(x)$ è la forma logica di questa nozione: vale per ogni x, senza eccezioni.

Le nozioni di genericità che abbiamo analizzato propongono, convergentemente, un'alternativa a questa struttura. L'universale generico non vale per tutti: vale per quasi tutti nel senso strutturale — per tutti quelli che non sono eccezionali, dove l'eccezionalità è definita dalla struttura in questione. Questa differenza potrebbe sembrare un semplice indebolimento — un «quasi tutti» al posto di un «tutti» — ma la nostra analisi ha mostrato che si tratta di qualcosa di qualitativamente diverso. L'universale generico non è il quantificatore universale $\forall$ con una clausola di eccezione aggiunta: è una struttura primitiva che non si riduce alla quantificazione universale con restrizioni, e che ha una logica propria — la logica della normalità strutturale, dell'attraversamento degli insiemi densi, della compatibilità massimale con la struttura di predicazione.

Questa ridefinizione ha conseguenze filosofiche importanti. Essa suggerisce che l'universalità, nella sua forma più ricca e più profonda, non è affatto la generalizzazione senza eccezioni — il «tutti» che esclude ogni singolo caso contrario — ma è piuttosto la compatibilità massimale con la struttura: il «non eccezionale rispetto a nessuna struttura di eccezionalità definibile». Un'universalità che non è l'assenza di deviazioni, ma la presenza in tutti i luoghi che non siano stati definiti come luoghi di assenza.

Questo universale *generico* — nel senso tecnico che questo trattato ha cercato di precisare — è più fragile dell'universale classico sotto un rispetto: esso ammette eccezioni, individui che non lo soddisfano. Ma è più robusto sotto un altro rispetto decisivo: esso non dipende dall'inventario completo dei casi, non richiede una enumerazione esaustiva degli individui, non è falsificato dalla scoperta di un singolo controesempio sufficientemente eccezionale. Esso è definito strutturalmente — per rapporto alle proprietà della struttura intera — e questa definizione strutturale lo rende stabile rispetto alle variazioni empiriche che falsificherebbero un universale classico.

VI.5. Il generico e il tipico: verso un'epistemologia del caso strutturale

L'opposizione tra il generico matematico e il tipo biologico, che abbiamo analizzato nel quarto capitolo, può essere riletta ora in luce della struttura comune che abbiamo identificato, e si rivela meno assoluta di quanto sembrava.

Il tipo biologico è, come si è detto, il più concreto e singolare degli individui: è questo esemplare, in questo museo, con queste sue caratteristiche idiosincratiche. Eppure la sua funzione nomenclatoriale è di rappresentare l'intera specie — un universale che copre milioni di individui. Come è possibile che il massimamente concreto svolga la funzione del massimamente universale?

La risposta che il sistema nomenclatoriale offre implicitamente è che la rappresentazione non è predicativa ma indicale: il tipo non dice «gli individui della specie sono fatti così», dice «la specie è questa». E «questa» è un gesto ostensivo che

punta a qualcosa di particolare per fissare il riferimento di qualcosa di generale. Il tipo è il *punto di ancoraggio* dell'universale, non la sua *definizione*.

Ora, questa struttura — un punto di ancoraggio che fissa il riferimento di un universale senza definirlo predicativamente — è strutturalmente analoga, in modo sorprendente, alla struttura del filtro generico nel forcing. Il filtro generico G non è una definizione del reale di Cohen: è il punto di ancoraggio che fissa quale tra i tanti possibili reali generici è stato aggiunto a M. Diversi filtri generici M-generici diversi producono diversi reali di Cohen, tutti generici, tutti incomparabili tra loro dal punto di vista delle proprietà predicative di M; il filtro G *seleziona* uno di questi reali senza *definirlo*. L'analogia con il tipo è precisa: diversi individui di una specie sono tutti *esemplari validi* della specie, e il tipo *seleziona* uno di essi come portatore del nome senza *definirlo*.

La differenza rimane, naturalmente, significativa: l'ancoraggio del tipo è storico-indicale (è avvenuto in un momento preciso del passato, è irrevocabile, dipende da un atto comunicativo), mentre l'ancoraggio del filtro generico è procedurale-strutturale (è il risultato di una procedura di attraversamento degli insiemi densi). Ma la funzione epistemologica è analoga: entrambi stabilizzano il riferimento di un universale attraverso la selezione di un individuo, senza ridurre quel riferimento a una proprietà predicativa.

VI.6. Il generico come forma del pensiero strutturale

L'itinerario di questo trattato consente, in conclusione, di avanzare una tesi di portata più ampia, che va oltre la ricognizione comparativa dei casi e propone un'ipotesi di unificazione.

La nozione di genericità — nella sua forma tecnica e nella sua forma semi-tecnica — è la forma propria del *pensiero strutturale*, inteso come il pensiero che ragiona sulle proprietà degli oggetti non caso per caso, non esemplare per esemplare, ma per rapporto alla struttura che li ospita e alle relazioni che intrattengono con l'insieme del sistema. Questo pensiero strutturale è l'eredità matematica del Novecento — il pensiero che ha passato da Dedekind e Hilbert, attraverso Noether e van der Waerden, fino alla scuola bourbakista e oltre — ed è il pensiero che il forcing di Cohen ha portato a un grado di sofisticazione straordinaria, mostrando che le strutture matematiche possono essere estese in modi che aggiungono elementi genuinamente nuovi senza contraddire le proprietà strutturali già acquisite.

Il generico è la forma che questo pensiero strutturale assume quando si interroga sulla propria frontiera: quando chiede non «quali proprietà strutturali questa struttura ha?» ma «quali oggetti soddisfano tutte le proprietà strutturali senza essere stati costruiti dalla struttura?». È la domanda sull'eccedenza interna del sistema, sulla differenza tra ciò che il sistema contiene e ciò che può nominare.

Questa domanda è, in ultima analisi, la domanda sulla *contingenza strutturale*: sulla possibilità che ci siano oggetti — reali di Cohen, punti generici, tipi aberranti, enunciati generici con proprietà salienti — che soddisfano tutte le condizioni strutturali senza essere stati previsti, costruiti, o nominati dalla struttura. La contingenza strutturale non è il capriccio dell'irrazionale: è la forma precisamente matematica della possibilità che il sistema non abbia detto l'ultima parola su se stesso, che vi siano estensioni genuine della struttura che non vi sono contenute ma che ne rispettano integralmente le leggi.

In questo senso, la nozione di genericità è non soltanto un concetto tecnico della matematica, non soltanto uno strumento della semantica del linguaggio naturale, non soltanto un principio regolativo della biologia sistematica: è la forma logica dell'apertura strutturale, dell'incompletezza non come difetto ma come fertilità, della possibilità sempre aperta di estensioni che non tradiscono l'origine ma la superano. È, in altre parole, la forma matematicamente precisa di ciò che nella tradizione filosofica si è spesso chiamato — con minore precisione — la trascendenza immanente della struttura rispetto a se stessa.

VI.7. Conclusione: il generico come operatore di futuro

Un'ultima osservazione, di carattere quasi ancipite tra il formale e il riflessivo, può chiudere questo trattato.

Il filtro generico G nel forcing coheniano è costruito per diagonalizzazione: si attraversano uno ad uno tutti gli insiemi densi di M, si sceglie un elemento in ciascuno, si costruisce il filtro come limite di questa successione di scelte. Questa costruzione è *sempre possibile* — lo garantisce la numerabilità di M — ma non è *mai completata in tempo finito*: ogni momento finito della costruzione ha già attraversato una quantità finita di insiemi densi e non li ha ancora attraversati tutti. Il filtro generico completo esiste, in un senso preciso, solo al limite — solo dal punto di vista esterno al processo, solo per l'osservatore che può vedere tutta la successione diagonale nella sua interezza.

Dal punto di vista interno alla struttura M, il filtro generico non è mai presente: è sempre in costruzione, sempre in processo, sempre non ancora completo. Esso è, strutturalmente, un oggetto del futuro — non nel senso temporale banale, ma nel senso che la sua esistenza come oggetto completo presuppone un punto di vista che nessun momento del processo costruttivo può occupare. Il generico è l'oggetto al quale il processo tende senza mai raggiungerlo dall'interno.

Questa struttura — la tensione verso un completamento che si può descrivere dall'esterno ma non raggiungere dall'interno — risuona con una forma del pensiero che non è soltanto matematica. Ogni sistema di conoscenza che si confronti seriamente con i propri limiti — ogni paradigma scientifico che incontri i propri casi anomali, ogni sistema filosofico che si interroghi sulla propria origine, ogni lingua naturale che cerchi di tematizzare la propria struttura — si trova di fronte a questa

struttura di trascendenza interna. Il generico è il nome matematico di questa struttura; la sua precisione formale non esaurisce ma illumina — con una luce tagliente e non riducibile ad altra sorgente — la dinamica più generale del pensiero che si vuole rigoroso di fronte alla propria ineliminabile apertura.

Il vocabolario della genericità — residuale, denso, filtrante, che attraversa, che forza — è il vocabolario di una matematica che ha imparato a pensare l'eccedenza con la stessa esattezza con cui pensa la struttura. Questo trattato ha tentato di mostrare che questa conquista non appartiene soltanto alla teoria degli insiemi, ma è una struttura che il pensiero riconosce — sotto forme diverse, con strumenti diversi, con finalità diverse — ogni volta che cerca di nominare ciò che la struttura ospita senza poter nominare.

VII. Gradi di Genericità: il Forcing di Sacks e il Forcing di Mathias

VII.1. Oltre il reale di Cohen: la gerarchia della genericità

La costruzione del filtro generico nel secondo capitolo ha utilizzato, come nozione di forcing paradigmatica, l'insieme $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$ delle funzioni parziali finite da ω a $\{0,1\}$. Il reale di Cohen prodotto da questa costruzione è, in un senso preciso, il tipo più «semplice» di reale generico: esso è generico rispetto a una nozione di forcing che codifica informazioni finite e prive di struttura combinatoria aggiuntiva. Ma la teoria del forcing conosce nozioni di forcing molto più ricche, che producono reali con proprietà di genericità più forti — reali che sono, in un certo senso, «più generici» del reale di Cohen.

Questa gerarchia della genericità non è soltanto un fenomeno tecnico. Essa rivela aspetti della struttura dell'infinito numerabile che la nozione coheniana di genericità non riesce a catturare, e illumina in modo nuovo il rapporto tra determinatezza combinatoria e indefinibilità interna che è il filo conduttore dell'intero trattato. Le due nozioni di forcing che si analizzeranno in questo capitolo — il forcing di Sacks e il forcing di Mathias — producono rispettivamente il *reale di Sacks* (o reale minimale) e il *reale di Mathias* (o reale Ramsey), che sono, dal punto di vista della complessità di Turing, ai due estremi opposti dello spettro della genericità: il primo è il più «piccolo» possibile, il secondo è il più «grande» possibile in un senso che verrà reso preciso.

VII.2. Il forcing di Sacks e i reali minimali

Il forcing di Sacks, introdotto da Gerald Sacks nel 1971, usa come condizioni i *perfect trees* — alberi perfetti di sottoinsiemi di ω — invece delle funzioni parziali finite usate nel forcing di Cohen. La scelta di questo tipo di condizioni produce un reale generico con una proprietà di genericità straordinariamente forte: la *minimalità*.

Formalmente, un *albero perfetto* (perfect tree) è un sottoinsieme $T \subseteq 2^{<\omega}$ (dell'insieme delle sequenze finite di 0 e 1) che soddisfa tre condizioni. In primo luogo, T è chiuso verso il basso: se $\sigma \in T$ e $\tau \subset \sigma$ (τ è un prefisso di σ), allora $\tau \in T$. In secondo luogo, T è infinitamente ramificato: per ogni $\sigma \in T$ esistono due estensioni incompatibili $\tau_0, \tau_1 \in T$ di σ (cioè $\sigma \subset \tau_0$, $\sigma \subset \tau_1$ e τ_0, τ_1 non sono confrontabili). In terzo luogo, T non ha rami isolati: ogni ramo infinito di T è il limite di sequenze di biforcazioni. Il *corpo* (body) di T è l'insieme [T] dei rami infiniti di T, che è un sottoinsieme chiuso e perfetto (nel senso topologico) di 2^ω — e quindi di misura positiva nella topologia prodotto di Cantor.

La nozione di forcing di Sacks è $\mathbb{S} = (\text{PerfTrees}, \supseteq)$, l'insieme degli alberi perfetti ordinato per l'inclusione inversa: $T \leq S$ significa $T \subseteq S$, cioè T è un albero «più piccolo» di S, che estende S aggiungendo più restrizioni. Una condizione T nel forcing di Sacks afferma «il reale generico appartiene al corpo [T]»; una condizione più forte specifica un corpus più ristretto.

Il filtro generico G su $\mathbb{S}$ determina un unico ramo infinito $g = \bigcap\{[T] : T \in G\} \in 2^\omega$, che è il *reale di Sacks*. La genericità di G garantisce che g «passi attraverso» ogni insieme denso di $\mathbb{S}$ in M, il che significa che g non può essere escluso da nessun sottoinsieme della topologia di Cantor definibile in M. Ma la struttura di $\mathbb{S}$ — il fatto che le condizioni siano alberi perfetti anziché funzioni finite — conferisce a g una proprietà aggiuntiva decisiva.

Teorema (Sacks, 1971). Il reale di Sacks g è *minimale*: per ogni funzione $f \in 2^\omega \cap M[g]$, si ha $f \in M$ oppure f ha lo stesso grado di Turing di g.

Un reale $r \in 2^\omega$ ha *grado di Turing* maggiore di s se r è Turing-computabile da s: esiste una macchina di Turing con oracolo s che calcola r. Il grado di Turing misura la «forza computazionale» di un reale — quanto informazione è necessaria per calcolarlo. La minimalità del reale di Sacks significa che non esiste alcun reale in M[g] che sia strettamente intermedio tra M e g in grado di Turing: ogni reale in M[g] è già in M oppure è Turing-equivalente a g. Il reale di Sacks non porta con sé nessuna «informazione parziale» — nessun reale di complessità intermedia — ma porta immediatamente tutta la propria forza computazionale.

Il reale di Cohen, al contrario, non è minimale. Dato un reale di Cohen c, è possibile costruire un reale d strettamente intermedio tra M e c in grado di Turing: ad esempio, i bit pari di c formano un reale che non è in M ma non è Turing-equivalente a c.

VII.3. La struttura degli alberi perfetti e la topologia di Cantor

Per comprendere perché il forcing di Sacks produce reali minimali, occorre esaminare più da vicino la struttura combinatoria degli alberi perfetti e la sua relazione con la topologia dello spazio di Cantor 2^ω.

Lo spazio di Cantor 2^ω, dotato della topologia prodotto (dove i cilindri $[\sigma] = \{f \in 2^\omega : \sigma \subset f\}$ per $\sigma \in 2^{<\omega}$ sono una base di aperti), è uno spazio metrico compatto totalmente sconnesso. Esso è omeomorfo all'insieme triario di Cantor $C \subseteq [0,1]$. La misura di Haar su 2^ω (la misura prodotto delle misure uniformi su {0,1}) è la misura di Lebesgue dopo l'identificazione tramite la rappresentazione binaria.

Un sottoinsieme $P \subseteq 2^\omega$ è *perfetto* se è chiuso e non ha punti isolati. I corpi [T] degli alberi perfetti T sono esattamente i sottoinsiemi perfetti di 2^ω, per il teorema di Alexandrov-Hausdorff. Ogni sottoinsieme perfetto non vuoto di 2^ω ha la potenza del continuo (è biunivoco con 2^ω) e ha misura di Lebesgue che può essere nulla (come l'insieme di Cantor) o positiva.

La condizione di forcing $T \in \mathbb{S}$ «dice» che il reale generico appartiene al corpo [T] — a questo insieme perfetto. Una condizione più forte $S \subseteq T$ «dice» che il reale appartiene al sottoinsieme perfetto $[S] \subseteq [T]$. Il filtro generico G, che attraversa tutti gli insiemi densi di $\mathbb{S}$ in M, determina un singolo punto g nell'intersezione $\bigcap\{[T] : T \in G\}$: questa intersezione è non vuota (per la compattezza di 2^ω) e si riduce a un singolo punto (per la genericità, che forza la scelta ad essere sempre più raffinata attraverso gli insiemi densi).

La minimalità segue dalla seguente proprietà degli alberi perfetti: per ogni coloritura $\varepsilon : T \to \{0,1\}$ degli elementi di un albero perfetto T, esiste un albero perfetto $S \subseteq T$ (un sottoalbero perfetto) su cui la coloritura è *omogenea* — assume un solo valore. Questa proprietà di omogeneità, analoga al teorema di Ramsey per alberi perfetti, è ciò che garantisce che il reale di Sacks non trasporti informazione intermedia: qualunque proprietà booleana degli elementi dell'albero può essere eliminata passando a un sottoalbero perfetto, e dunque nessuna informazione parziale può «sopravvivere» nel reale generico.

VII.4. Il forcing di Mathias e i reali Ramsey

All'estremo opposto dello spettro si colloca il forcing di Mathias, introdotto da Adrian Mathias nel 1977. Mentre il reale di Sacks è il più «piccolo» possibile in termini di grado di Turing, il reale di Mathias è, in un senso preciso, il più «grande»: esso contiene informazione combinatoria massimale rispetto alla struttura degli insiemi quasi-densi di $\mathbb{N}$.

Le condizioni del forcing di Mathias sono coppie (s, A) dove $s \in [\omega]^{<\omega}$ è un insieme finito di numeri naturali e $A \in [\omega]^\omega$ è un insieme infinito di numeri naturali con $\min(A) > \max(s)$. La relazione di estensione è: $(t, B) \leq (s, A)$ se $s \subseteq t$, $B \subseteq A$ e $t \setminus s \subseteq A$. Una condizione (s, A) afferma «il reale generico contiene s come segmento iniziale e tutti i suoi altri elementi appartengono ad A». Una condizione più forte specifica un supporto A più ristretto e/o un segmento iniziale t più lungo.

Il reale di Mathias è un sottoinsieme infinito $r \subseteq \omega$ determinato dal filtro generico G: $r = \bigcup\{s : \exists A, (s, A) \in G\}$. La proprietà caratteristica di r è la seguente.

Teorema (Mathias, 1977). Il reale di Mathias r è *Ramsey-generico*: per ogni sottoinsieme colorito $X \subseteq [\omega]^2$ (ogni colorazione dei pari non ordinati di naturali con due colori) definibile in M, esiste un sottoinsieme infinito $H \subseteq r$ che è *omogeneo* per X (tutti i pari di H hanno lo stesso colore).

La condizione di essere Ramsey-generico è precisamente la generalizzazione infinita del teorema di Ramsey finito: il reale di Mathias non «evita» nessuna proprietà combinatoria Ramsey che sia definibile in M. Esso è, in questo senso, il più ricco possibile dal punto di vista delle strutture combinatorie che porta con sé.

Il reale di Mathias è, per contrasto con il reale di Sacks, *massimale* in termini di informazione Ramsey: esso soddisfa tutte le proprietà di omogeneità infinita che un sottoinsieme di ω può soddisfare, nella misura in cui queste proprietà sono definibili in M. Non è minimale — è Turing-computabile da molti reali più semplici — ma ha una struttura combinatoria interna massimale.

VII.5. La gerarchia Sacks-Cohen-Mathias e le nozioni di idealità

I tre tipi di reale generico analizzati — di Cohen, di Sacks, di Mathias — si collocano in una gerarchia che non è soltanto tecnica ma ha una profonda interpretazione filosofica rispetto alla nozione di genericità come «ciò che non appartiene ad alcun insieme eccezionale».

La differenza fondamentale tra le tre nozioni di forcing sta nella struttura degli *ideali* rispetto ai quali si definisce l'eccezionalità. Nel forcing di Cohen, l'ideale implicito è quello degli insiemi *magri* (di prima categoria di Baire) nello spazio di Cantor: il reale di Cohen non appartiene a nessun insieme magro definibile in M. Nel forcing di Sacks, l'ideale è quello degli insiemi *non-perfetti* — i sottoinsiemi di 2^ω che non contengono nessun insieme perfetto non vuoto: il reale di Sacks non appartiene a nessun tale insieme definibile in M, e la sua minimalità è esattamente la forma di questa evitabilità degli insiemi combinatoriamente poveri. Nel forcing di Mathias, l'ideale è quello degli insiemi *non-Ramsey* — i sottoinsiemi di [ω]^ω che non contengono nessun sottoinsieme omogeneo per ogni colorazione definibile: il reale di Mathias evita tutti questi insiemi.

La struttura ideale della genericità — la forma «il generico non appartiene ad alcun elemento dell'ideale eccezionale» — è dunque parametrizzata dalla scelta dell'ideale, e questa scelta riflette quale tipo di eccezionalità si vuole evitare. Il generico di Cohen evita l'eccezionalità topologica (la magrezza); il generico di Sacks evita l'eccezionalità computazionale-minimale (la non-minimalità); il generico di Mathias evita l'eccezionalità combinatoria-Ramsey (la non-Ramsey-ness).

Questa molteplicità di nozioni di idealità è filosoficamente fondamentale: essa mostra che la genericità non è una nozione univoca ma una famiglia di nozioni parametrizzate dalla struttura di eccezionalità prescelta. Il generico assoluto — il reale che evita simultaneamente tutti i tipi di eccezionalità — non esiste, perché le condizioni di

genericità rispetto a diversi ideali sono mutuamente incompatibili in generale: un reale Sacks-generico non è Cohen-generico, e viceversa.

VII.6. Forcing di Sacks e minimalità: implicazioni filosofiche

La minimalità del reale di Sacks ha implicazioni filosofiche che toccano direttamente la struttura del processo conoscitivo — il modo in cui si acquisisce informazione nuova sul mondo.

Il reale di Cohen aggiunge informazione al modello M in modo «diffuso»: esso porta con sé una moltitudine di reali intermedi, ciascuno dei quali codifica una porzione di informazione. L'estensione M[c] contiene non soltanto il reale di Cohen c ma anche tutti i reali computabili da segmenti finiti di c, tutti i reali ottenibili da c per operazioni definibili — una nuvola densa di nuovi oggetti che circondano c nella gerarchia di Turing.

Il reale di Sacks, al contrario, aggiunge informazione in modo «concentrato»: l'estensione M[g] non contiene nulla di nuovo che non sia già in M oppure equivalente in complessità a g stesso. L'informazione portata da g è, per così dire, atomica: non si può essere «a metà strada» verso g senza già possederlo interamente. Questa proprietà rende il reale di Sacks una forma di genericità radicalmente diversa da quella coheniana: esso è l'istanza matematica di un'informazione che non si può parzialmente approssimare, che non ammette gradi intermedi di conoscenza.

Nella struttura epistemologica badiousiana, questa distinzione corrisponderebbe alla differenza tra procedure di verità che ammettono gradi di parziale realizzazione (come le procedure scientifiche che accumulano progressivamente evidenza) e procedure che sono «tutto o niente» — dove ogni approssimazione parziale è ancora completamente nel dominio del sapere costituito, e il salto alla verità è discontinuo, non graduale. Il reale di Sacks è la forma matematica di questa discontinuità radicale nell'acquisizione di informazione genuinamente nuova.

VII.7. Il forcing di Mathias e la struttura Ramsey dell'infinito

Il reale di Mathias tocca un aspetto dell'infinito numerabile che è al centro di una delle più profonde connessioni della logica matematica con la combinatoria: il teorema di Ramsey e le sue generalizzazioni infinite.

Il teorema di Ramsey finito afferma che per ogni $k, n \in \mathbb{N}$ esiste $R(k, n)$ tale che ogni 2-colorazione dei pari di un insieme di $R(k, n)$ elementi contiene un sottoinsieme omogeneo di k elementi. Il teorema di Ramsey infinito afferma che per ogni 2-colorazione dei pari di $\mathbb{N}$ esiste un sottoinsieme infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ omogeneo. Questi

teoremi catturano una proprietà fondamentale dell'infinito: l'inevitabilità dell'ordine nelle strutture infinitamente complesse.

Un sottoinsieme $r \subseteq \omega$ è *Ramsey* se per ogni sottoinsieme $X \subseteq [\omega]^2$ definibile (con parametri in un dato modello), r contiene un sottoinsieme infinito omogeneo per X. La proprietà di essere Ramsey è la forma «in grande» della proprietà di omogeneità del teorema di Ramsey infinito: non soltanto per una singola colorazione, ma per tutte le colorazioni definibili.

Il reale di Mathias è Ramsey-generico — Ramsey rispetto a tutte le colorazioni definibili nel modello di base M. Questa proprietà è la forma di genericità che evita l'eccezionalità combinatoria: il reale di Mathias non è mai «il lato sbagliato» di nessuna colorazione definibile. Esso soddisfa ogni proprietà di regularità combinatoria infinita che il modello M può riconoscere come inevitabile.

La connessione con la genericità topologica di Baire è profonda. Il teorema di Galvin-Prikry (1973) — una generalizzazione del teorema di Ramsey infinito — afferma che ogni sottoinsieme di Borel di [ω]^ω è Ramsey: contiene o è disjunto da [H]^ω per qualche H infinito. La proprietà di essere Ramsey è dunque, per i sottoinsiemi di Borel, automatica; è per i sottoinsiemi non-Borel (non-misurabili o non dotati della proprietà di Baire) che la proprietà può fallire. Il reale di Mathias è Ramsey rispetto a tutti gli insiemi definibili in M, il che è, in senso tecnico, più forte della proprietà di Baire nella topologia di Mathias su [ω]^ω.

VII.8. La molteplicità delle genericità e l'impossibile unificazione

La molteplicità irriducibile delle nozioni di genericità — topologica, computazionale-minimale, combinatoria-Ramsey — è una scoperta matematica con implicazioni filosofiche di prima grandezza. Essa mostra che non esiste «la» genericità in senso assoluto, ma soltanto genericità relative a strutture di eccezionalità, e che queste strutture non sono tutte compatibili tra loro.

Questo fatto ha una lettura precisa nell'economia del presente trattato. Il sesto capitolo ha proposto la struttura della genericità come forma dell'*eccedenza interna* di ogni sistema sufficientemente espressivo rispetto alle proprie risorse di nominazione. I risultati di questo capitolo precisano questa struttura in modo cruciale: l'eccedenza interna non è unica, non punta in una sola direzione. Ogni sistema di eccezionalità — ogni ideale di insiemi «eccezionali» rispetto al quale si definisce la genericità — produce una diversa forma di eccedenza, e queste forme sono genuinamente plurali.

La conseguenza filosofica è che la genericità non è il nome di una singola proprietà dell'essere, ma è il nome di una struttura relazionale: la relazione tra un sistema di eccezionalità e il suo residuo. Cambiando il sistema di eccezionalità, cambia la forma del generico. Il generico di Cohen, il generico di Sacks, il generico di Mathias sono tre

modi distinti in cui un oggetto può «non essere eccezionale» rispetto a tre diverse nozioni di eccezionalità — e nessuno di essi esaurisce il concetto.

Questa irriducibile pluralità del generico è, paradossalmente, la conferma più forte della sua importanza filosofica. Se esistesse un unico tipo di genericità — un unico modo di essere non-eccezionale — il concetto sarebbe relativamente ordinario, una variante tecnica della generalità statistica. Che esistano molti tipi di genericità, genuinamente diversi e mutuamente incompatibili, rivela che la struttura dell'eccedenza interna è essa stessa molteplice e inesauribile: non c'è un modo unico di «sfuggire a ogni eccezionalità», perché le eccezionalità sono plurali.

VIII. Il Teorema di Solovay e la Convergenza delle Due Genericità

VIII.1. La frattura tra categoria e misura e la promessa di una riconciliazione

Il primo capitolo di questo trattato ha stabilito, con la necessaria precisione tecnica, che le due nozioni di «quasi tutti» — quella topologica nel senso di Baire (residualità) e quella misurativa nel senso di Lebesgue (misura piena) — sono indipendenti: esistono insiemi residuali di misura nulla e insiemi di misura piena che sono magri. La genericità topologica e la genericità misurativa sono concetti genuinamente distinti, e la loro distinzione è non soltanto formale ma riflessiva di strutture diverse degli spazi in questione.

Questa frattura ha una storia interna alla fondazione della matematica: per molto tempo si è ritenuto che la sua irriducibilità fosse un fatto necessario, non dipendente dalle scelte assiomatiche della teoria degli insiemi. Il teorema di Robert Solovay del 1970 ha mostrato che questa credenza era errata in un modo sorprendente: l'esistenza di un *cardinale inaccessibile* — una grande cardinalità nella gerarchia di ZFC — è sufficiente per costruire un modello della teoria degli insiemi in cui le due nozioni di «quasi tutti» sono perfettamente allineate per tutti gli insiemi di reali *definibili*. In questo modello, ogni insieme di reali ha la proprietà di Baire, è Lebesgue-misurabile, e ha la proprietà di Ramsey — e le tre proprietà non solo coesistono ma sono equivalenti per una larga classe di insiemi.

Il teorema di Solovay è dunque, dal punto di vista del presente trattato, la forma più forte di riconciliazione tra le diverse nozioni di genericità: esso mostra che, sotto ipotesi di grandi cardinali, la molteplicità irriducibile delle genericità si riduce — non scompare, ma si organizza in una struttura coerente e mutuamente compatibile.

VIII.2. Cardinali inaccessibili e la gerarchia dei grandi cardinali

Prima di enunciare il teorema di Solovay, è necessario introdurre la nozione di cardinale inaccessibile e situarla nella gerarchia più ampia dei *grandi cardinali* — assiomi di infinità che estendono ZFC in modi sempre più forti.

Un cardinale infinito κ è *debolmente inaccessibile* se è un cardinale limite regolare: non è il successore di nessun cardinale, e non è il limite cofinalizzabile da un insieme di cardinali più piccoli di cardinalità minore di κ. Equivalentemente, κ è debolmente inaccessibile se:

(a) κ non è il successore di nessun cardinale: $\forall \alpha < \kappa$, $\alpha^+ < \kappa$ (dove α^+ è il successore di α) (b) κ ha cofinalità κ: ogni insieme cofinalizzante in κ ha cardinalità almeno κ

Un cardinale κ è *fortemente inaccessibile* (o semplicemente *inaccessibile*) se è debolmente inaccessibile e additivamente chiuso: per ogni $\alpha < \kappa$, $2^\alpha < \kappa$. Questo significa che κ è «chiuso rispetto all'operazione di potenza»: nessuna potenza di un cardinale minore di κ riesce a raggiungerlo.

La forza di questa definizione è immediata: se κ è inaccessibile, allora V_κ — il rango κ nella gerarchia di Von Neumann — è un modello di ZFC. L'esistenza di un cardinale inaccessibile implica dunque la consistenza di ZFC (e molto di più), e per il secondo teorema di incompletezza di Gödel non è dimostrabile all'interno di ZFC. Gli assiomi di grandi cardinali sono esattamente affermazioni sull'esistenza di cardinali con queste o proprietà analoghe più forti — cardinali Mahlo, cardinali misurabili, cardinali supercompatti, e così via — che estendono ZFC in modi che non sono dimostrabili dall'interno di ZFC, ma che sono motivati da ragioni di coerenza, eleganza, e forza esplicativa.

La gerarchia dei grandi cardinali è parzialmente ordinata dalla forza della consistenza: l'esistenza di un cardinale misurabile implica l'esistenza di un cardinale inaccessibile, l'esistenza di un cardinale supercompatto implica l'esistenza di molti cardinali misurabili, e così via. Questa gerarchia è, nei livelli più bassi, abbastanza ben compresa; nei livelli più alti, essa è ancora oggetto di ricerca attiva e tocca questioni aperte fondamentali della teoria degli insiemi.

VIII.3. Il modello di Solovay: costruzione e proprietà

Il teorema di Solovay (1970) afferma quanto segue:

Teorema (Solovay, 1970). Supponiamo che esista un cardinale inaccessibile κ. Allora esiste un modello M di ZF (teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel *senza* l'assioma della scelta) in cui:

(a) Ogni insieme di reali è Lebesgue-misurabile. (b) Ogni insieme di reali ha la proprietà di Baire. (c) Ogni insieme di reali ha la proprietà di Ramsey. (d) Il principio di dipendenza numerabile (DC) vale: per ogni relazione binaria R su un insieme non

vuoto A tale che $\forall x \in A\ \exists y \in A$, R(x,y), esiste una sequenza (x)_{n∈ℕ} con R(x , x +1) per ogni n.

La costruzione del modello di Solovay procede in due passi. Nel primo passo, si usa il forcing per «collassare» il cardinale inaccessibile κ a $\aleph_1$ — per rendere κ numerabile dall'esterno del modello esteso. Questo si ottiene usando la nozione di forcing Coll(ω, $<\kappa$) = {p : p funzione parziale finita, dom(p) ⊆ ω, ran(p) ⊆ κ}. Il filtro generico G su Coll(ω, $<\kappa$) produce un modello M[G] in cui κ è diventato $\aleph_1$ — il primo cardinale non numerabile del modello esteso — e tutti i cardinali di M inferiori a κ sono stati «collassati» a ω.

Nel secondo passo, si considera il modello HOD(ℝ)^{M[G]} — il modello degli insiemi ereditariamente ordinalmente definibili con parametri nei reali, all'interno di M[G]. Questo è il *modello di Solovay* $\mathcal{S}$ che soddisfa le proprietà (a)–(d).

La chiave della dimostrazione è il seguente lemma tecnico fondamentale:

Lemma (Solovay). In M[G], ogni insieme di reali A che è definibile (con parametri in V_κ^M) è *simmetrico rispetto al forcing generico* nel senso che A può essere rappresentato come l'interpretazione di un nome simmetrico — un nome che è invariante rispetto all'azione del gruppo di automorfismi di Coll(ω, $<\kappa$). Questa simmetria garantisce che A abbia la proprietà di Baire e sia Lebesgue-misurabile.

La connessione con la genericità è precisa: un insieme A ha la proprietà di Baire se e solo se è «genericamente determinato» nel senso che la domanda «il reale generico appartiene ad A?» è decisa (in un senso o nell'altro) da qualche condizione di forcing. La genericità rispetto a Coll(ω, $<\kappa$) — la massima genericità possibile, dato che si sta collassando un cardinale inaccessibile — è sufficiente per garantire che *ogni* insieme definibile sia genericamente determinato, e dunque abbia la proprietà di Baire.

VIII.4. Il ruolo del cardinale inaccessibile: necessità o mera sufficienza?

Una domanda naturale sorge immediatamente: l'ipotesi del cardinale inaccessibile è necessaria per il teorema di Solovay, o è soltanto una condizione sufficiente? La risposta — stabilita da Saharon Shelah nel 1984 — è sorprendente e ha implicazioni filosofiche profonde.

Teorema (Shelah, 1984). L'ipotesi di un cardinale inaccessibile è *necessaria* per la Lebesgue-misurabilità di tutti i sottoinsiemi di ℝ. Più precisamente, se ogni sottoinsieme di ℝ definibile da parametri ordinali è Lebesgue-misurabile (in un modello di ZF + DC), allora ω_1 è inaccessibile nel modello costruibile L.

Questo risultato stabilisce una sorprendente equivalenza: l'allineamento delle due nozioni di quasi-totalità (topologica e misurativa) per tutti gli insiemi definibili è *logicamente equivalente* all'esistenza di un cardinale inaccessibile in senso appropriato. L'ipotesi di grandi cardinali non è un'assunzione tecnica arbitraria imposta dall'esterno

per ottenere il risultato: è la condizione necessaria e sufficiente per la riconciliazione delle due genericità.

Questo ha un significato filosofico di grande rilievo. Il cardinale inaccessibile è, per sua natura, un cardinale che non è raggiungibile dall'interno della gerarchia degli insiemi «ordinari» — non è il successore di nessun cardinale, non è il limite cofinalizzato da una sequenza di cardinali più piccoli, non è «costruibile» a partire dai cardinali inferiori. Esso è, in senso tecnico, un cardinale *generico rispetto alla gerarchia ordinaria*: esso eccede ogni operazione di costruzione disponibile all'interno della gerarchia dei cardinali accessibili.

La necessità del cardinale inaccessibile per la riconciliazione delle genericità rivela dunque una struttura notevole: per rendere compatibili tra loro le diverse nozioni di «quasi tutti», occorre postulare l'esistenza di un livello della gerarchia insiemistica che è esso stesso «generico» rispetto ai livelli inferiori. La genericità, per essere unificata nelle sue diverse forme, richiede un fondamento che è a sua volta di natura generica.

VIII.5. La proprietà di Baire, la misurabilità e la proprietà di Ramsey: il triangolo di Solovay

Il teorema di Solovay rivela una struttura triangolare tra le tre principali nozioni di regolarità degli insiemi di reali: la proprietà di Baire (PB), la Lebesgue-misurabilità (LM), e la proprietà di Ramsey (PR). In ZFC senza grandi cardinali, queste tre nozioni sono indipendenti: esistono modelli in cui una vale e le altre no. Nel modello di Solovay, tutte e tre valgono simultaneamente per tutti gli insiemi definibili.

Questo triangolo ha una struttura più fine che vale la pena di articolare. La proprietà di Baire è la più «topologica»: un insieme $A \subseteq 2^\omega$ ha PB se esiste un aperto U tale che la differenza simmetrica $A \triangle U$ è magra. La Lebesgue-misurabilità è la più «misurativa»: A è misurabile se esiste un misurabile B tale che $A \triangle B$ ha misura nulla. La proprietà di Ramsey è la più «combinatoria»: $A \subseteq [\omega]^\omega$ ha PR se esiste un sottoinsieme infinito $H \subseteq \omega$ tale che $[H]^\omega \subseteq A$ oppure $[H]^\omega \cap A = \varnothing$.

Nel modello di Solovay, queste tre proprietà non soltanto coesistono ma sono legate da implicazioni che non valgono in ZFC senza grandi cardinali:

PR $\Rightarrow$ PB (nel modello di Solovay, e più in generale per insiemi analitici) LM (per insiemi analitici) $\Leftarrow$ PB (per insiemi analitici, in ZFC) PR + PB $\Leftrightarrow$ LM (per la classe degli insiemi regolari nel modello di Solovay)

Queste implicazioni mostrano che, sotto l'ipotesi di inaccessibilità, le tre nozioni di regolarità si organizzano in una struttura coerente in cui ciascuna implica le altre per gli insiemi definibili. La molteplicità delle genericità non scompare, ma si armonizza: ciascuna nozione di «quasi tutti» è compatibile con le altre, e un insieme che è «quasi tutto» in un senso lo è anche negli altri due sensi.

VIII.6. Grandi cardinali e determinatezza: il teorema di Martin-Steel

La connessione tra grandi cardinali e regolarità degli insiemi di reali non si limita al teorema di Solovay. Una linea di ricerca successiva ha stabilito che ipotesi di grandi cardinali più forti implicano proprietà di regolarità ancora più generali, attraverso la nozione di *determinatezza dei giochi*.

Un gioco infinito su un insieme $A \subseteq \omega^\omega$ si svolge tra due giocatori I e II che alternano mosse naturali, costruendo una sequenza infinita $f \in \omega^\omega$: il giocatore I sceglie $f(0)$, il giocatore II sceglie $f(1)$, il giocatore I sceglie $f(2)$, e così via. Il giocatore I vince se $f \in A$; il giocatore II vince se $f \notin A$. Il gioco è *determinato* se uno dei due giocatori ha una strategia vincente (una funzione che specifica la mossa ottimale in ogni posizione, garantendo la vittoria qualunque cosa faccia l'avversario).

L'*assioma di determinatezza* (AD) afferma che ogni sottoinsieme $A \subseteq \omega^\omega$ è determinato. AD è incompatibile con l'assioma della scelta (AC): usando AC, si possono costruire giochi non determinati. Tuttavia, la *determinatezza proiettiva* (PD) — la determinatezza di tutti i giochi con A nel livello proiettivo della gerarchia descrittiva — è compatibile con AC, e ha conseguenze straordinarie sulle proprietà di regolarità degli insiemi proiettivi.

Teorema (Martin-Steel, 1989). Se esistono n cardinali di Woodin (cardinali con proprietà di embedding elementare molto più forti dell'inaccessibilità), allora tutti gli insiemi Π^1_{n+1} (al livello n+1 della gerarchia proiettiva co-analitica) sono determinati, Lebesgue-misurabili, e hanno la proprietà di Baire.

Questo teorema mostra che la gerarchia dei grandi cardinali e la gerarchia di regolarità degli insiemi di reali sono strutturalmente correlate: ogni salto verso l'alto nella gerarchia dei grandi cardinali corrisponde a un salto verso l'alto nella gerarchia di regolarità. I grandi cardinali sono la condizione di possibilità dell'allineamento progressivamente più ampio delle diverse nozioni di genericità.

VIII.7. Il teorema di Solovay e la filosofia della matematica: il realismo strutturale

Le implicazioni filosofiche del teorema di Solovay per la filosofia della matematica sono di grande portata. Esse toccano in modo diretto la questione del realismo matematico e del rapporto tra struttura formale e verità.

Il pluralismo insiemistico — la posizione difesa da Joel Hamkins e discussa nella bibliografia del sesto capitolo — sostiene che esistono molti universi di ZFC, ugualmente «reali», con proprietà diverse: in alcuni, IC vale; in altri, IC è falsa; in alcuni, ogni insieme di reali è misurabile; in altri, esistono insiemi non misurabili. In questo quadro, il teorema di Solovay mostrerebbe semplicemente che esiste un *tipo* di

universo in cui le diverse nozioni di genericità convergono — ma non che questo universo sia preferibile agli altri.

Il *realismo strutturale* — la posizione, difesa tra gli altri da Shapiro e Resnik, secondo cui la matematica descrive strutture astratte indipendenti dalle scelte assiomatiche — interpreta il teorema di Solovay in modo diverso: esso mostra che la convergenza delle diverse nozioni di genericità ha una condizione naturale — l'inaccessibilità — che è intrinsecamente motivata dalla struttura della gerarchia cardinale. L'inaccessibilità non è un'ipotesi arbitraria ma una proprietà che emerge naturalmente dalle strutture stesse.

La posizione che sembra più coerente con l'impostazione del presente trattato è quella del *naturalismo matematico* di Maddy: le ipotesi di grandi cardinali sono giustificate dalla loro forza esplicativa e dalla loro capacità di organizzare in modo coerente le strutture matematiche già studiate. Il teorema di Solovay, da questo punto di vista, giustifica l'assioma del cardinale inaccessibile non perché ci sia una «verità» indipendente sulla sua esistenza, ma perché la sua adozione risolve in modo elegante e necessario (per il teorema di Shelah) il problema della convergenza delle genericità.

VIII.8. La convergenza delle genericità come ideale regolativo

Il risultato filosoficamente più ricco del teorema di Solovay è tuttavia di carattere diverso: esso mostra che la convergenza delle diverse nozioni di genericità — la coincidenza di ciò che è «quasi tutto» in senso topologico, in senso misurativo, e in senso combinatorio — è raggiungibile, ma soltanto a condizione di postulare l'esistenza di un livello della gerarchia insiemistica che è esso stesso di natura generica rispetto ai livelli inferiori.

Questa struttura ha la forma di un *ideale regolativo* nel senso kantiano: la convergenza completa delle genericità non è mai realizzata nel finito, non è costruibile all'interno di nessun sistema formale fisso, ma è postulabile come orizzonte verso cui la gerarchia dei grandi cardinali tende. Ogni passo nella gerarchia dei grandi cardinali — da inaccessibile a Mahlo, da Mahlo a misurabile, da misurabile a di Woodin — produce una convergenza più ampia, ma nessun passo produce la convergenza assoluta.

Il generico totale — il punto che soddisfa simultaneamente tutte le nozioni di genericità rispetto a qualunque struttura di eccezionalità — non esiste come oggetto matematico determinato: esso è il limite ideale della gerarchia dei grandi cardinali, un orizzonte regolativo che organizza il progresso della teoria degli insiemi senza essere mai raggiunto all'interno di nessun sistema formale fisso.

Questa struttura — un ideale regolativo di convergenza totale che è avvicinabile asintoticamente ma mai raggiunto — è la forma matematicamente precisa di ciò che la tradizione filosofica ha spesso espresso in termini di totalità trascendentale: l'Idea della ragione nel senso di Kant, il sapere assoluto nel senso di Hegel, la verità come limite della indagine nel senso di Peirce. Il teorema di Solovay non identifica la genericità

matematica con nessuna di queste nozioni filosofiche, ma mostra che la struttura matematica della convergenza delle genericità ha la medesima forma logica dell'ideale regolativo: necessario per organizzare la struttura complessiva, ma non raggiungibile all'interno di nessun sistema parziale.

IX. Vaghezza e Genericità: il Confine tra l'Indeterminato e il Generico

IX.1. Il problema della vaghezza: un'introduzione necessaria

La filosofia del linguaggio analitica ha dedicato, a partire dagli anni Settanta, un'attenzione crescente al problema della *vaghezza* (vagueness) — la proprietà dei predicati il cui campo di applicazione non ha confini netti, che ammettono casi borderline in cui né l'applicazione né la non-applicazione del predicato è determinata. I predicati vaghi sono ubiqui nel linguaggio naturale: «alto», «calvo», «vecchio», «rosso», «mucchio» sono esempi paradigmatici. Per ciascuno di essi esistono individui che sicuramente soddisfano il predicato, individui che sicuramente non lo soddisfano, e individui per i quali non è chiaro se lo soddisfino o no — i casi borderline.

Il problema della vaghezza non è soltanto lessicale ma logico: la presenza di casi borderline sembra minacciare il principio di bivalenza (ogni proposizione è o vera o falsa), genera il paradosso sorite (un uomo con un capello è calvo; se un uomo con n capelli è calvo, allora anche un uomo con n+1 capelli è calvo; dunque ogni uomo è calvo), e solleva questioni profonde sulla natura del contenuto semantico delle parole.

La connessione tra vaghezza e genericità non è immediata ma è profonda. Essa emerge quando si considera il seguente fatto: i generic statements — gli enunciati come «gli uccelli volano» — sono enunciati sull'applicazione *tipica* di un predicato a una categoria, non sulla sua applicazione universale. La vaghezza riguarda il *confine* tra l'applicazione e la non-applicazione di un predicato a un individuo; la genericità riguarda la *norma* di applicazione del predicato a una categoria. Eppure, come si vedrà, queste due problematiche si intrecciano in modo sottile e rivelano strutture comuni.

IX.2. Le principali teorie della vaghezza

Prima di tracciare le connessioni con la genericità, è necessario presentare le principali posizioni nel dibattito sulla vaghezza.

La teoria *epistemica* — difesa da Timothy Williamson con grande rigore in *Vagueness* (1994) — sostiene che ogni enunciato ha un valore di verità determinato, e che la presenza di casi borderline riflette soltanto la nostra *ignoranza* del valore di verità, non un'indeterminatezza reale nel mondo o nel linguaggio. Il predicato «alto» ha un

confine netto, ma noi non sappiamo dove si trovi. La bivalenza è preservata al costo di ammettere che esistono fatti semantici che eccedono radicalmente la nostra capacità di conoscerli.

La teoria della *logica a molti valori* — nelle versioni di Łukasiewicz, Goguen, e altri — attribuisce ai casi borderline valori di verità intermedi tra 0 (falso) e 1 (vero): la proposizione «Tibbles è un mucchio» quando Tibbles ha 500 granuli ha valore di verità 0.5, o qualche altro valore in [0,1]. Questa risposta è tecnicamente elaborata ma solleva il problema della *higher-order vagueness*: il confine tra i casi con valore 1 e i casi con valore intermedio è anch'esso vago, generando una regressione.

La teoria della *supervalutazione* — elaborata da Kit Fine nel 1975 — interpreta la vaghezza come indeterminatezza nelle condizioni di verità: un predicato vago ha molte «precisificazioni» (sharpenings) — modi di tracciare il confine che sono tutti compatibili con l'uso linguistico stabilito — e un enunciato è *superveramente vero* (supertrue) se è vero in tutte le precisificazioni, *superveramente falso* se è falso in tutte le precisificazioni, e indeterminato altrimenti. La logica supervalutazionista è classica per gli enunciati sovra-veri e sovra-falsi, ma non bivalente per gli enunciati indeterminati.

La teoria del *relativismo contestuale* — nelle versioni di DeRose, MacFarlane, e altri — sostiene che il valore di verità di un enunciato vago è relativo al *contesto di valutazione*: «Tibbles è alto» è vero in un contesto e falso in un altro, e entrambi i valori sono determinati e corretti nel loro rispettivo contesto. Questa posizione ha il vantaggio di preservare la bivalenza relativa al contesto, ma genera difficoltà nel rendere conto del disaccordo genuino su casi borderline.

IX.3. Vaghezza e genericità: la struttura del caso borderline

La connessione tra vaghezza e genericità diventa visibile quando si considerano gli enunciati generici che coinvolgono predicati vaghi. Si consideri:

«Gli uomini alti sono attraenti.» «I mucchi sono instabili.» «I vecchi hanno difficoltà con la tecnologia.»

In ciascuno di questi enunciati, il soggetto è una categoria definita da un predicato vago («alto», «mucchio», «vecchio»). La genericità dell'enunciato — il fatto che esso predica una proprietà in modo non universale ma strutturale — interagisce con la vaghezza del soggetto in un modo che né la teoria dei generics né la teoria della vaghezza, prese isolatamente, riescono a catturare completamente.

Il caso borderline di un predicato vago è, in un certo senso, il *caso generico* di quel predicato: l'individuo borderline è colui che non è sicuramente nell'estensione né sicuramente fuori dall'estensione, e questa indeterminatezza lo rende, strutturalmente, l'individuo che soddisfa «tutte le proprietà compatibili con il predicato» senza essere catturato da nessuna condizione di applicazione netta. Il caso borderline è il residuo di tutte le applicazioni definitive del predicato.

Questa struttura — residuo di tutte le applicazioni definitive, non catturato da nessuna condizione di esclusione precisa — è esattamente la struttura del generico matematico. Il caso borderline di un predicato vago è, in modo informale ma strutturalmente preciso, il *punto generico* del predicato: l'individuo che abita la frontiera, che non è eccezionale rispetto a nessuna delle molte precisificazioni possibili del predicato.

IX.4. Il sorite e la struttura degli insiemi densi

Il paradosso sorite — il ragionamento che porta dalla presenza di un caso borderline alla conclusione assurda che tutti gli individui soddisfano (o non soddisfano) il predicato — può essere analizzato, in modo illuminante, attraverso la struttura degli insiemi densi del forcing.

Il sorite procede attraverso una sequenza di individui u_0, u_1, u_2, ..., u dove u_0 soddisfa sicuramente il predicato P (è sicuramente un mucchio), u non lo soddisfa sicuramente (ha un solo granulo), e ciascun passo nella sequenza è un cambiamento «impercettibile» (rimozione di un granulo). Il principio del sorite è la seguente affermazione:

$\forall i \, (P(u_i) \rightarrow P(u_{i+1}))$

che, unita al fatto $P(u_0)$, produce per induzione P(u) — una contraddizione.

La teoria supervalutazionista risponde che questo principio, pur sembrando ovvio, non è super-vero: esistono precisificazioni del predicato «mucchio» in cui il confine cade tra u_i e u_{i+1} per qualche i, rendendo il principio falso in quella precisificazione. Williamson risponde che il principio è semplicemente falso — esiste un confine netto, e il principio nega questo confine — sebbene non possiamo sapere dove sia.

La struttura del forcing offre un'analisi alternativa che illumina questo paradosso in modo nuovo. Si interpreti la sequenza u_0, u_1, ..., u come un parziale ordine in cui $u_i \leq$ u se $i \leq j$ — una catena lineare. L'insieme delle condizioni di «applicazione sicura» di P è, in questo parziale ordine, un *filtro* (è chiuso verso l'alto nella catena): se P si applica sicuramente a u_i, allora si applica sicuramente a tutti i predecessori u con $j < i$. L'insieme delle condizioni di «non-applicazione sicura» è un *ideale* (chiuso verso il basso).

Il caso borderline è il punto in cui il filtro e l'ideale si incontrano — il punto di frontiera tra le due regioni. In un modello classico (una precisificazione), questo confine è un singolo punto; ma il predicato vago, nel suo uso ordinario, non fissa nessuna singola precisificazione. La vaghezza è l'assenza di un filtro generico che «decida» il confine: il filtro generico rispetto all'insieme di tutte le precisificazioni ammissibili non è costruibile dall'interno del linguaggio ordinario, perché le precisificazioni sono definite esternamente al linguaggio.

IX.5. L'epistemismo di Williamson e la genericità dei fatti semantici

La teoria epistemica di Williamson è quella che ha la connessione più diretta e filosoficamente feconda con la nozione di genericità. Williamson sostiene che ogni predicato vago ha un confine netto, ma questo confine non è conoscibile: la nostra conoscenza semantica è necessariamente imprecisa, e le parole «scivolano» rispetto ai fatti che dovrebbero designare in modo tale da impedire la conoscenza del confine esatto.

L'argomento centrale di Williamson si basa sulla *safety condition* per la conoscenza: si sa che p soltanto se, in ogni situazione sufficientemente simile alla situazione attuale, p è vera. Per i casi borderline, ogni situazione in cui l'individuo borderline soddisfa il predicato è sufficientemente simile a situazioni in cui non lo soddisfa (perché il confine è vicino), e dunque non si può sapere se lo soddisfa o no — anche se c'è un fatto determinato della questione.

La struttura di questa argomentazione risuona con la struttura della genericità in modo preciso. Il fatto semantico che Williamson postula — l'esistenza di un confine netto non conoscibile — è strutturalmente analogo al filtro generico di Cohen: esso esiste, è determinato, ma non è nominabile con le risorse del sistema che lo genera (il linguaggio e le capacità cognitive dei parlanti). Il confine netto del predicato vago è, nella teoria di Williamson, un oggetto *generico rispetto al sistema delle pratiche linguistiche*: esso soddisfa tutte le condizioni di compatibilità con l'uso linguistico stabilito senza essere identificabile da nessuna descrizione basata su quell'uso.

La differenza fondamentale è che nel forcing il generico è costruito dall'esterno del modello attraverso una procedura esplicita; nel caso dei predicati vaghi, il confine netto postulato da Williamson è ipotizzato come già esistente ma irraggiungibile dalla pratica linguistica. Non c'è, nel caso dei predicati vaghi, un «punto di vista esterno» dal quale il confine è visibile: il confine esiste, ma non è accessibile a nessuna prospettiva — né interna né esterna al linguaggio.

IX.6. La supervalutazione come topologia e gli insiemi generici di precisificazioni

La teoria supervalutazionista ha una lettura topologica che illumina ulteriormente la connessione con la genericità. Le precisificazioni di un predicato vago — i modi di tracciare il confine compatibili con l'uso linguistico — possono essere organizzate in uno spazio con una struttura topologica naturale: due precisificazioni sono «vicine» se concordano sul valore di verità di una grande classe di enunciati, «lontane» se discordano su molti enunciati.

In questa topologia, un enunciato è superveramente vero se è vero in tutte le precisificazioni — se la sua verità è *topologicamente aperta*, stabile rispetto a piccole

perturbazioni della precisificazione. Un enunciato è indeterminato se la sua verità dipende da quale precisificazione si sceglie — se il suo valore di verità non è topologicamente stabile.

Il generico di questo spazio di precisificazioni — la precisificazione che soddisfa «tutte le proprietà che valgono genericamente» per le precisificazioni — è la precisificazione che concorda con la quasi totalità delle altre su ogni enunciato. Essa è il punto generico dello spazio di precisificazioni nel senso di Grothendieck: il punto la cui chiusura è l'intero spazio, il punto da cui tutte le altre precisificazioni si ottengono per «specializzazione» — per l'imposizione di condizioni aggiuntive che fissano il confine del predicato.

Ma questo punto generico non esiste come precisificazione concreta: esso è il limite ideale di tutte le precisificazioni, l'intersezione di tutta la struttura dello spazio — e questa intersezione è vuota se lo spazio è un continuo di precisificazioni (che è il caso tipico per i predicati vaghi come «alto» o «calvo»). La genericità dello spazio di precisificazioni è un ideale che non si realizza: non c'è una «precisificazione generica» di «alto» che sia la migliore.

IX.7. Genericità lessicale e stereotipi: il caso dei generics normativi

Una connessione particolarmente sottile tra vaghezza e genericità emerge nei *generics normativi* — gli enunciati generici che prescrivono come le cose dovrebbero essere piuttosto che descrivere come sono. Sarah-Jane Leslie ha mostrato che molti enunciati generici hanno una componente normativa implicita: «i medici si preoccupano per i propri pazienti» descrive una norma per i medici, non soltanto una regolarità statistica; «gli insegnanti arrivano puntuali» è una norma professionale mascherata da generalizzazione descrittiva.

I generics normativi sono quelli in cui la struttura di normalità che determina la verità dell'enunciato non è estratta da dati statistici o da proprietà biologico-funzionali, ma da *norme sociali* — aspettative di comportamento che definiscono cosa significa «essere un buon membro» della categoria.

In questi casi, la vaghezza del predicato normativo («preoccuparsi abbastanza», «arrivare puntuale») si intreccia con la genericità dell'enunciato in un modo che genera conseguenze pratiche importanti. Un enunciato come «le donne sono emotive» può essere letto come generico descrittivo (afferma una regolarità) o come generico normativo (afferma un'aspettativa su come le donne dovrebbero comportarsi, o su come ci si aspetta che si comportino). La vaghezza di «emotiva» lascia indeterminato il confine tra l'essere emotiva e il non esserlo; la genericità dell'enunciato estende questa indeterminatezza a tutta la categoria.

Il rischio epistemico — già segnalato nel quinto capitolo a proposito degli enunciati generici con proprietà salienti — è amplificato dall'interazione tra vaghezza e

genericità: un enunciato generico-normativo con predicato vago ha la massima capacità di trasmettere stereotipi senza essere falsificabile, perché la vaghezza del predicato impedisce di identificare controesempi netti e la genericità dell'enunciato impedisce di confutarlo con eccezioni statistiche.

IX.8. Il problema di Williamson e la conoscenza del generico

Un risultato di Williamson in *Knowledge and Its Limits* (2000) ha una connessione diretta con la struttura della genericità matematica che merita di essere esplicitata. Williamson dimostra che la conoscenza non è *chiusa per conseguenza logica*: esistono casi in cui si sa che p, si sa che p implica q, ma non si sa che q — perché la conoscenza di q richiederebbe una safety condition più forte di quella richiesta per la conoscenza di p.

Questo risultato ha un corrispettivo preciso nella struttura del forcing. Nel modello M[G], il Lemma Fondamentale garantisce che ogni verità in M[G] sia forzata da qualche condizione del filtro generico — che ogni fatto sia «pre-certificato» da un'informazione finita. Ma la conoscenza dal punto di vista interno a M — cioè la conoscenza che un abitante di M può avere sulla struttura di M[G] — è limitata da ciò che M può calcolare sulla relazione di forcing. Un abitante di M sa che «se G è generico, allora tale formula sarà vera in M[G]», ma non sa che G sarà generico, perché la genericità di G non è determinabile dall'interno di M.

La struttura della conoscenza rispetto al generico è dunque analoga alla struttura della conoscenza rispetto al confine netto di un predicato vago nella teoria di Williamson: si può sapere che il fatto esiste (il confine esiste, il filtro generico esiste), ma non si può sapere dove sia (quale sia il confine preciso, quale sia il filtro generico) usando le risorse del sistema interno. La genericità, come la vaghezza secondo Williamson, genera un tipo di ignoranza irriducibile — non per difetto epistemico del soggetto conoscente, ma per struttura del sistema entro cui la conoscenza si esercita.

IX.9. Verso una teoria unificata: la genericità come forma dell'indeterminatezza strutturale

Il percorso di questo capitolo suggerisce che la vaghezza e la genericità sono due manifestazioni di un fenomeno più profondo: l'*indeterminatezza strutturale* — la proprietà di certi oggetti o predicati di non essere completamente determinati dalle risorse del sistema che li ospita, pur essendo pienamente determinati dal punto di vista di un sistema più ampio.

Il caso borderline di un predicato vago è indeterminato rispetto al sistema delle pratiche linguistiche ordinarie, ma è determinato (secondo Williamson) rispetto a un sistema di fatti semantici che quelle pratiche non riescono a catturare. Il filtro generico è indeterminato rispetto al modello M — non è costruibile con le risorse di M — ma è determinato rispetto alla procedura diagonale che lo costruisce dall'esterno di M. Il

punto generico di Grothendieck è «indeterminato» nel senso che non corrisponde a nessun punto chiuso dello schema, ma è determinato come portatore dell'ideale nullo.

In tutti e tre i casi, l'indeterminatezza è relativa a un sistema di risorse, e la determinatezza è relativa a un sistema più ampio. L'indeterminatezza strutturale non è assenza di fatto ma eccedenza di fatto: il fatto è «troppo grande» per essere catturato dal sistema locale di risorse, non «troppo piccolo». E questa eccedenza è precisamente la struttura della genericità nel senso tecnico elaborato in tutto il trattato.

Una teoria unificata dell'indeterminatezza strutturale — che includa la vaghezza, la genericità matematica, e la genericità linguistica come casi particolari di un'unica forma di eccedenza del fatto rispetto alle risorse sistemiche di cattura — è un programma filosofico ancora da sviluppare nella sua pienezza. Il presente capitolo ha cercato di mostrare che tale programma non è soltanto possibile ma è motivato dalla profonda analogia strutturale tra i fenomeni considerati. I suoi strumenti tecnici sarebbero quelli già incontrati — algebre di Heyting, semantica dei mondi possibili, teoria dei topos — e il suo ambito di applicazione sarebbe più vasto di qualunque singolo dominio analizzato nel trattato.

X. La Variazione Eidetica di Husserl e il Contrappunto Fenomenologico

X.1. Il problema dell'essenza e il metodo fenomenologico

La fenomenologia husserliana si confronta con una versione del problema dell'universale che, pur essendo formulata in un vocabolario radicalmente diverso da quello della teoria dei modelli e della filosofia del linguaggio analitica, presenta una struttura formalmente analoga a quella esaminata nei capitoli precedenti. Come si individua l'essenza di un fenomeno — ciò che lo rende necessariamente quello che è, indipendentemente dalle sue manifestazioni contingenti? Come si distingue ciò che è essenziale da ciò che è accidentale nell'esperienza di un oggetto? Il metodo husserliano di risposta a queste domande — la *variazione eidetica* (eidetische Variation) o *variazione immaginativa libera* (freie Variation in der Phantasie) — ha una struttura che entra in dialogo profondo con la nozione di genericità elaborata in questo trattato.

La variazione eidetica è il procedimento attraverso cui si individua l'*eidos* — l'essenza — di un tipo di oggetto. Essa consiste nel partire da un esempio concreto del tipo e sottoporlo a una serie di variazioni immaginarie: si modifica sistematicamente l'esempio, cambiando un tratto alla volta, e ci si chiede se l'oggetto risultante è ancora riconoscibile come un esemplare del tipo oppure no. I tratti che possono essere variati senza perdere il tipo sono accidentali; i tratti la cui variazione produce un oggetto di tipo diverso (o nessun oggetto) sono essenziali. L'essenza del tipo è l'invariante di tutte

le variazioni ammissibili — ciò che rimane identico attraverso l'intero spazio delle variazioni possibili.

X.2. La struttura della variazione eidetica: spazio di variazioni e invariante

Husserl sviluppa il metodo della variazione eidetica in modo sistematico in *Ideen I* (1913) e soprattutto in *Esperienza e giudizio* (1939, postumo), dove riceve la sua elaborazione più dettagliata. La struttura del metodo può essere articolata nel modo seguente.

Si parte da un esempio concreto — una figura geometrica specifica, un'esperienza percettiva determinata, un atto di coscienza singolare. Questo esempio è il *caso base* della variazione: esso è ciò da cui si parte, ma non ha alcun privilegio rispetto alle variazioni che da esso si generano. Si producono poi, attraverso l'immaginazione libera, varianti dell'esempio: si immagina la figura più grande, più piccola, di colore diverso, di forma leggermente modificata. Ciascuna variante è un «caso possibile» del tipo, un esemplare che potrebbe essere al posto dell'originale.

L'insieme di tutte le varianti ammissibili forma lo *spazio delle variazioni* del tipo — l'insieme di tutti i casi possibili che sono ancora riconoscibili come casi del tipo. Questo spazio non è determinato in anticipo ma si costruisce attraverso il processo della variazione stessa: si esplora progressivamente lo spazio delle possibilità, spingendo la variazione fino ai limiti di ciò che è ancora riconoscibile.

L'*invariante* attraverso tutte le variazioni è l'eidos del tipo: è ciò che rimane identico quando tutto il resto è variato, ciò che non può essere modificato senza che l'oggetto cessi di essere un caso del tipo. Husserl chiama questo invariante la «struttura tipica» o la «struttura essenziale» del tipo, e sostiene che essa è afferrata in modo intuitivo — in un atto di *intuizione eidetica* (Wesensschau) — quando la variazione ha esplorato sufficientemente lo spazio delle possibilità.

X.3. La variazione eidetica e il residuale: analogia strutturale con Baire

La struttura della variazione eidetica husserliana è, da un punto di vista formale, analoga in modo sorprendente alla struttura del generico topologico nel senso di Baire — pur essendo arrivata a questa struttura attraverso un percorso completamente diverso, partendo dall'analisi fenomenologica della coscienza piuttosto che dalla matematica degli spazi metrici.

Nella variazione eidetica, l'essenza è l'*invariante di tutte le variazioni ammissibili*: è ciò che rimane dopo che si sono variate tutte le caratteristiche contingenti. Nella topologia di Baire, il generico è ciò che *non appartiene ad alcun insieme magro* — è il residuale di tutte le esclusioni possibili. In entrambi i casi, la struttura è quella del residuo: si ottiene

l'oggetto cercato (l'essenza, il generico) sottraendo progressivamente tutto ciò che è accidentale (le caratteristiche variabili, gli elementi degli insiemi eccezionali).

La differenza fondamentale è la direzionalità del processo. Nella variazione eidetica husserliana, si *aggiunge* variazioni per esplorare lo spazio delle possibilità, e si individua l'essenza come l'invariante positivo che sopravvive a tutte le variazioni. Nella topologia di Baire, si *sottrae* gli insiemi magri, e il generico è il residuo della sottrazione. Ma la struttura logica è duale e speculare: in entrambi i casi si ha un processo sistematico di attraversamento di tutte le possibilità (variazioni ammissibili / insiemi densi), e il risultato è l'invariante (essenza / generico) che non è eliminato da nessuna delle esclusioni eseguite.

Questa dualità può essere resa precisa in linguaggio categoriale. La variazione eidetica è strutturalmente un *colimite* (limite diretto): si aggrega l'insieme di tutte le variazioni e si individua ciò che è invariante come il morfismo universale che fattorizza tutte le inclusioni. Il generico di Baire è strutturalmente un *limite* (limite inverso): si interseca l'insieme di tutti gli aperti densi e si individua il punto che appartiene a tutti. Colimite e limite sono duali nella teoria delle categorie — e questa è precisamente la dualità produttivo/residuale già identificata nell'Appendice B a proposito delle nozioni di genericità categoriale.

X.4. L'intuizione eidetica e il problema della sua giustificazione

Il punto più controverso della teoria husserliana della variazione eidetica è la nozione di *intuizione eidetica* — l'atto attraverso cui si afferra l'essenza al termine della variazione. Husserl sostiene che l'essenza è data *direttamente* all'intuizione, con un'evidenza analoga (ma non identica) a quella dell'intuizione sensibile: come si vede il rosso di questa tela, così si «vede» l'essenza del rosso in generale.

Questa nozione è stata largamente criticata nella tradizione analitica, che l'ha accusata di oscurità metodologica e di fare appello a una facoltà cognitiva mal specificata. Wittgenstein, in molti passi delle *Ricerche filosofiche*, decostruisce l'idea che vi sia un atto mentale di «cogliere» un'essenza o una regola, mostrando che ciò che chiamiamo «seguire una regola» è una pratica sociale, non l'apprensione di un oggetto mentale determinato.

La critica è giusta nel suo bersaglio immediato, ma rischia di perdere ciò che vi è di genuinamente importante nella struttura del metodo husserliano. L'intuizione eidetica non è un atto misterioso separato dalla variazione: è il riconoscimento, al termine di una variazione sufficientemente estesa, che l'invariante è stato identificato — che le variazioni hanno coperto sufficientemente lo spazio delle possibilità da rendere credibile che l'ulteriore variazione non produrrebbe nulla di nuovo. Questo riconoscimento è fallibile, revisabile, dipendente dall'estensione della variazione — ed è esattamente analogo al riconoscimento, nella pratica matematica, che una struttura ha le proprietà di genericità.

Nel forcing, la genericità del filtro G non è colta da un atto intuitivo speciale: è una proprietà formalmente verificabile — G interseca ogni insieme denso di M. Ma la *costruzione* del filtro generico per diagonalizzazione — il processo di attraversamento progressivo degli insiemi densi — è strutturalmente analoga alla variazione eidetica husserliana: si esplora sistematicamente lo spazio delle possibilità (gli insiemi densi) fino a costruire il filtro che le ha attraversate tutte. L'unica differenza è che la diagonalizzazione produce l'oggetto generico per una procedura esplicita e verificabile, mentre la variazione eidetica produce l'essenza per un processo che rimane parzialmente intuitivo.

X.5. Il tipo husserliano e il tipo biologico: convergenza e divergenza

La nozione husserliana di tipo (*Typus*) ha una connessione interessante con il tipo nomenclatoriale della biologia sistematica analizzato nel quarto capitolo — una connessione che illumina entrambe le nozioni.

In *Esperienza e giudizio*, Husserl distingue tra il tipo *empirico* e il tipo *eidetico*. Il tipo empirico è la struttura tipica che emerge dall'esperienza ripetuta di oggetti simili: si percepiscono molti gatti e si forma una «struttura tipica del gatto» che funge da orientamento per le percezioni successive — ogni nuovo gatto è percepito *come* un gatto, in quanto soddisfa la struttura tipica precedentemente formata. Il tipo eidetico è la struttura necessaria del tipo — ciò che non può essere variato senza che il tipo si perda — ottenuta attraverso la variazione eidetica a partire dal tipo empirico.

Il tipo biologico linneano è chiaramente un tipo nel senso husserliano empirico: esso è un esemplare concreto che funge da ancoraggio per il riconoscimento dei membri successivi della specie. Ogni nuovo esemplare è riconosciuto come membro della specie perché «somiglia» al tipo (in senso morfologico) e/o perché è imparentato genealogicamente con esso. Il tipo biologico orienta la percezione dei nuovi esemplari nello stesso modo in cui il tipo empirico husserliano orienta la percezione dei nuovi casi.

Ma la differenza tra il tipo husserliano e il tipo biologico è rivelante. Il tipo husserliano empirico è una struttura cognitiva soggettiva — è la sedimentazione delle esperienze passate nella struttura anticipatoria della coscienza — e la variazione eidetica è il metodo per trasformarlo in un tipo eidetico intersoggettivo. Il tipo biologico linneano è, al contrario, un oggetto fisico concreto: non è una struttura cognitiva ma un esemplare conservato, e la sua funzione rappresentativa è istituzionale, non cognitiva. Il tipo husserliano è *in* la coscienza; il tipo linneano è *nel cassetto di un museo*.

Questa differenza rivela la profonda distinzione tra l'approccio fenomenologico e quello analitico-nominalista alla questione degli universali. Per Husserl, l'essenza è data alla coscienza attraverso un processo di purificazione cognitiva (la variazione eidetica); per il sistema nomenclatoriale, il riferimento dell'universale è fissato da un atto indicale storico (la designazione dell'olotipo). In entrambi i casi si cerca di ancorare l'universale

a qualcosa di determinato — ma i due approcci scelgono ancoraggi di natura radicalmente diversa: cognitivo-intuitivo il primo, storico-materiale il secondo.

X.6. Invariante husserliano e generico matematico: la dualità produttivo/residuale

Il rapporto tra l'invariante husserliano della variazione eidetica e il generico matematico può ora essere precisato attraverso la nozione di dualità produttivo/residuale identificata nell'Appendice B.

L'invariante husserliano è un *generico produttivo*: esso è il portatore di tutta la struttura comune di tutti i casi possibili del tipo, ciò da cui tutti i casi si ottengono per «specificazione» (aggiunta di caratteristiche accidentali). Ogni gatto concreto si ottiene dall'essenza del gatto per aggiunta di caratteristiche accidentali (questo colore, questa dimensione, questo temperamento); l'essenza è l'invariante da cui tutti i casi particolari si ottengono come specializzazioni.

Il generico matematico di Baire/Cohen è un *generico residuale*: esso è il punto che sopravvive a tutte le esclusioni, che non appartiene ad alcun insieme eccezionale, che è il residuo di tutte le sottrazioni. I casi «tipici» si ottengono dal generico non per specificazione ma per esclusione progressiva dei casi atipici; il generico è ciò che rimane quando tutto l'atipico è stato rimosso.

La dualità tra questi due modi di intendere il generico — come invariante positivo (Husserl) e come residuale negativo (Baire/Cohen) — è la dualità tra la costruzione del tipo dall'alto (partendo dall'essenza e scendendo ai casi particolari per specializzazione) e la costruzione dal basso (partendo dai casi particolari e salendo all'invariante per sottrazione progressiva delle caratteristiche accidentali). In termini categoriali, si tratta della dualità tra colimite (il generico come colimite di tutti i casi particolari) e limite (il generico come limite dell'intersezione di tutti i predicati essenziali).

X.7. La sedimentazione tipica e la formazione degli stereotipi

Il tipo empirico husserliano — la struttura tipica formata dall'esperienza ripetuta — ha una connessione diretta con la genesi psicologica degli stereotipi, tema già incontrato nel quinto capitolo a proposito dei generic statements di Leslie.

Per Husserl, il tipo empirico è il risultato di un processo di *sedimentazione* (Sedimentierung): le esperienze passate si depositano nella struttura anticipatoria della coscienza, formando un sistema di attese tipiche che orienta le percezioni future. Ogni nuova percezione viene confrontata con le strutture tipiche sedimentate e interpretata alla loro luce: un oggetto percepito per la prima volta è percepito *come* qualcosa di cui si ha già un tipo — viene identificato come esemplare di un tipo già formato.

Questa struttura di sedimentazione è la controparte fenomenologica della struttura degli stereotipi nella semantica cognitiva. Il generico di Leslie — l'enunciato generico che trasmette proprietà salienti e forma la struttura tipica della categoria — è il meccanismo linguistico attraverso cui le strutture tipiche husserliane si formano e si trasmettono: si apprende che «i pitbull mordono», e questa struttura tipica sedimenta nella coscienza un orientamento che porta a percepire ogni pitbull *come* un animale mordace, anticipando questa proprietà prima ancora di averla verificata nell'individuo concreto.

La fenomenologia husserliana fornisce dunque una spiegazione genetica del meccanismo psicologico che sta alla base degli stereotipi linguisticamente trasmessi attraverso i generic statements: essi funzionano perché il tipo empirico husserliano è strutturalmente pronto a recepire e sedimentare le generalizzazioni generiche, incorporandole nel sistema anticipatorio della coscienza prima ancora che la riflessione critica possa valutarle.

X.8. La riduzione fenomenologica e il problema del generico puro

Il metodo husserliano prevede, accanto alla variazione eidetica, un procedimento più radicale: la *riduzione fenomenologica* (epoché) o *messa tra parentesi del mondo naturale*. L'epoché non è un dubbio sulla realtà del mondo ma una sospensione della «tesi generale del mondo naturale» — del presupposto implicito, nell'attitudine naturale, che il mondo esista indipendentemente dalla coscienza. Con l'epoché, l'attenzione si sposta dall'oggetto al *modo* in cui l'oggetto è dato alla coscienza: non più «la rosa», ma «il darsi della rosa alla coscienza».

Applicata alla variazione eidetica, l'epoché produce la *riduzione eidetica*: non soltanto si variano le caratteristiche accidentali dell'oggetto, ma si mette tra parentesi anche l'esistenza dell'oggetto, concentrandosi sulla struttura puramente possibile del tipo. L'eidos, al termine della riduzione eidetica, è una struttura puramente noetica — una struttura del darsi possibile, indipendente da qualunque fatto sull'esistenza di oggetti reali.

Questa mossa husserliana verso il «generico puro» — l'essenza purificata da ogni contingenza esistenziale — è strutturalmente analoga, in modo sorprendente, alla costruzione del punto generico di Grothendieck. Il punto generico η di Spec(A) non corrisponde a nessun punto geometrico concreto (nessun ideale massimale), ma è il portatore di tutte le proprietà che valgono generalmente sullo schema — è il punto «a prescindere da ogni realizzazione concreta», la struttura puramente geometrica del tipo prima di qualunque specializzazione. L'epoché husserliana e il punto generico di Grothendieck sono due modi — uno fenomenologico, uno algebrico-geometrico — di pensare la struttura di un tipo al di là di qualunque esemplificazione concreta.

X.9. Husserl, Brentano e la struttura intenzionale del tipo

Un ultimo aspetto della relazione tra fenomenologia e genericità merita attenzione. La teoria husserliana degli atti intenzionali — sviluppata a partire dall'*intenzionalità* brentaniana — afferma che ogni atto di coscienza ha una struttura bipolare: ogni atto è atto di (qualcosa), ha un *correlato intenzionale* (noema) che non è l'oggetto reale ma la struttura attraverso cui l'oggetto è inteso.

Il noema di un atto di percezione di una rosa è la struttura «rosa-come-percepita-in-questo-modo»: essa include il tipo empirico, le proprietà attualmente percepite, e l'orizzonte di proprietà attese ma non ancora verificate. L'orizzonte noematico è la struttura generica dell'oggetto inteso: include tutto ciò che «ci si aspetta» dell'oggetto — tutte le proprietà che fanno parte del tipo — senza essere ancora determinato nei dettagli accidentali.

Questa struttura orizzontale del noema — la presenza nell'atto intenzionale di proprietà attese ma non ancora verificate — è la forma fenomenologica della genericità: il noema porta in sé una struttura generica prima di qualunque verifica empirica, anticipando il tipo attraverso tutte le sue determinazioni essenziali non ancora manifestate. Il noema generico è, nella struttura della coscienza intenzionale, l'analogo fenomenologico del filtro generico nel forcing: esso è la struttura dell'attesa totale, dell'attraversamento di tutti i possibili «insiemi densi» di determinazioni possibili, che orienta il processo infinito della verifica percettiva senza mai esaurirlo.

La differenza irriducibile — che impedisce di identificare il noema generico husserliano con il filtro generico coheniano — è che il noema è una struttura *della coscienza*, di ciò che compare nel campo trascendentale della soggettività, mentre il filtro generico è una struttura *matematica*, di ciò che è costruito nella gerarchia degli insiemi. Husserl non avrebbe accettato di ridurre la struttura noetica a una struttura matematica — né Badiou, da parte sua, avrebbe accettato di derivare l'ontologia matematica dalla fenomenologia trascendentale. Eppure le due strutture — noema generica e filtro generico — hanno una forma logica che è, al livello di astrazione sufficiente, la stessa: la struttura di un sistema di attese o condizioni che attraversa tutte le determinazioni possibili senza essere esaurito da nessuna di esse.

Appendice A. Le Algebre di Boole Complete e il Forcing per Algebre

A.1. Limitazioni dell'approccio per parziali ordini e motivazione dell'approccio algebrico

La presentazione del forcing nel secondo capitolo ha adottato la formulazione originale di Cohen in termini di parziali ordini e filtri generici. Questa presentazione è la più vicina all'intuizione matematica sottostante e rimane la più diffusa nei trattati introduttivi, ma ha uno svantaggio tecnico non trascurabile: la dipendenza dalla scelta del parziale ordine introduce una certa arbitrarietà apparente nella costruzione, e la relazione tra nozioni di forcing diverse (quelle che producono gli stessi modelli generici) rimane oscura finché non si dispone di un invariante algebrico che la catturi.

L'approccio per *algebre di Boole complete* — sviluppato indipendentemente da Scott, Solovay e Vopěnka nella seconda metà degli anni Sessanta, pochi anni dopo il lavoro originale di Cohen — risolve questo problema fornendo una presentazione del forcing che è, in un senso preciso, *canonicamente invariante*: a ogni nozione di forcing si associa un'algebra di Boole completa, e due nozioni di forcing producono gli stessi modelli generici se e solo se le loro algebre di Boole complete sono isomorfe. Questo approccio illumina al tempo stesso la struttura algebrica profonda del forcing e i legami tra esso e la logica modale, la semantica dei reticoli, e la teoria delle algebre di Heyting nella logica intuizionistica.

A.2. Algebra di Boole: ripasso delle nozioni fondamentali

Un'*algebra di Boole* è una struttura $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ dove B è un insieme, $\wedge$ e $\vee$ sono operazioni binarie (meet e join), $\neg$ è un'operazione unaria (complemento), e 0, 1 sono costanti, soggette agli assiomi standard che generalizzano le operazioni su insiemi (intersezione, unione, complemento) e i connettivi della logica proposizionale (congiunzione, disgiunzione, negazione). Un'algebra di Boole può essere equivalentemente caratterizzata come un reticolo distributivo complementato, dove ogni elemento ha un unico complemento $\neg b$ tale che $b \wedge \neg b = 0$ e $b \vee \neg b = 1$.

Esempi fondamentali: l'algebra delle parti $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X, con $\cap$, $\cup$, complemento, $\varnothing$, X; l'algebra degli aperti-chiusi (clopen) di uno spazio di Stone; l'algebra dei valori di verità $\{0,1\}$ della logica classica bivalente; l'algebra dei fattori diretti di un anello commutativo.

Un'algebra di Boole B è *completa* se ogni sottoinsieme $S \subseteq B$ ha sia un estremo superiore (join) $\bigvee S$ sia un estremo inferiore (meet) $\bigwedge S$ in B — cioè se B è chiusa per operazioni di join e meet infinite arbitrarie, non soltanto per quelle finite che gli assiomi standard garantiscono. Le algebre di Boole complete si comportano molto meglio rispetto alle considerazioni di completezza logica: in esse, ogni sistema di «valori di verità» ha un valore di verità risultante, anche se il sistema è infinito.

Un elemento $b \in B$ è *positivo* se $b > 0$, cioè $b \neq 0$. Un sottoinsieme $S \subseteq B$ è *antichain* se ogni due elementi distinti di S sono incompatibili: $a, b \in S$, $a \neq b \Rightarrow a \wedge b = 0$. L'algebra soddisfa la *countable chain condition* (c.c.c.) se ogni antichain è al più numerabile — esattamente la condizione che abbiamo incontrato nel contesto del forcing per parziali ordini.

A.3. L'algebra di Boole di un parziale ordine: la costruzione di completamento

Dato un parziale ordine $(P, \leq)$, è possibile associargli canonicamente un'algebra di Boole completa, che si indica con RO(P) (o B(P), o $\mathbb{B}(P)$ nella letteratura) e si chiama l'*algebra degli aperti regolari* di P, o il *completamento di Boole* di P.

La costruzione procede in due passi. Nel primo passo, si considera la topologia su P la cui base è data dagli intervalli «conici» verso il basso: per ogni $p \in P$, l'insieme $\downarrow p = \{q \in P : q \leq p\}$ è un aperto-base. Questa è la *topologia di Alexandrov* duale di P (o la topologia degli aperti verso il basso, a seconda della convenzione adottata per la direzione dell'ordine). Nel secondo passo, si considera l'algebra degli *aperti regolari* di questo spazio topologico: un aperto U è *regolare* se $U = \text{int}(\text{cl}(U))$, cioè se coincide con l'interno della sua chiusura. L'insieme RO(P) di tutti gli aperti regolari di P, con le operazioni:

$$U \wedge V = U \cap V \quad U \vee V = \text{int}(\text{cl}(U \cup V)) \quad \neg U = \text{int}(P \setminus U) \quad 0 = \varnothing \quad 1 = P$$

è un'algebra di Boole completa. I join infiniti in RO(P) sono dati da:

$$\bigvee_i U_i = \text{int}(\text{cl}(\bigcup_i U_i))$$

e i meet infiniti da:

$$\bigwedge_i U_i = \text{int}(\text{cl}(\bigcap_i U_i)) = \text{int}(\bigcap_i U_i)$$

(il secondo passaggio usa la regularità degli aperti).

C'è un'embedding naturale $e : P \to RO(P)^+$ (la parte positiva di RO(P)) dato da:

$$e(p) = \text{int}(\text{cl}(\downarrow p))$$

che manda ogni condizione p nel corrispondente «aperto regolare generato da p». Questa embedding è *densa* nel senso algebrico: ogni elemento positivo di RO(P) contiene e(p) per qualche $p \in P$.

A.4. Filtri generici e filtri ultragenerici: la traduzione algebrica

Un filtro G su P (nel senso già definito nel secondo capitolo) si traduce in un *ultrafiltro* su RO(P): un filtro U su RO(P) è un ultrafiltro se per ogni $b \in RO(P)$, o $b \in U$ o $\neg b \in U$. La genericità di G rispetto a un modello M si traduce nella condizione che U sia M-generico come filtro su RO(P): esso incontra ogni insieme denso di RO(P) che appartenga a M.

Questa traduzione ha il vantaggio di rendere la struttura dei filtri generici immediatamente leggibile in termini di logica proposizionale. Un ultrafiltro su un'algebra di Boole B assegna a ciascun elemento di B un valore di verità in {0,1}: b è «vero» nel filtro se $b \in U$, «falso» se $\neg b \in U$ (e la totalità dell'ultrafiltro garantisce che esattamente uno dei due casi vale). Il filtro generico M-generico è dunque, dal punto di vista della logica proposizionale algebrica, una *valutazione* classica dei valori di verità dell'algebra — ma è una valutazione che non è definibile dall'interno di M.

Questo legame tra il forcing e le valutazioni logiche è il fondamento della corrispondenza tra il forcing e la semantica dei modelli di Kripke per la logica modale e intuizionistica. Un'algebra di Boole completa B può essere interpretata come l'algebra dei valori di verità di una logica modale, dove $b \leq c$ in B corrisponde all'implicazione modale «necessariamente, se b allora c». La completezza dell'algebra garantisce che ogni sistema infinito di premesse abbia una conseguenza; la genericità del filtro garantisce che la valutazione sia coerente con tutte le premesse definibili dall'interno del modello.

A.5. La relazione di forcing per algebre di Boole: il valore di verità booleano

Il principale vantaggio dell'approccio per algebre di Boole complete è la possibilità di definire, per ogni formula φ del linguaggio insiemistico con parametri in M, un *valore di verità booleano* $\|\varphi\| \in B$, che è un elemento dell'algebra piuttosto che un mero valore binario. Questa è la nozione di *valutazione booleana* (boolean-valued model), introdotta da Scott e Solovay.

La costruzione procede per ricorsione sulla struttura delle formule. Per le formule atomiche, si definisce:

$$\|\tau \in \sigma\| = \bigvee \{ \| \tau = \varrho\| \wedge p : (\varrho, p) \in \sigma\}$$

$$\|\tau = \sigma\| = \|\tau \subseteq \sigma\| \wedge \|\sigma \subseteq \tau\|$$

dove $\|\tau \subseteq \sigma\| = \bigwedge \{ \| \tau' \in \sigma\| : \tau'$ compare in $\tau\}$ (con la debita cura nel trattamento dei nomi).

Per le connettive:

$$\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \wedge \|\psi\| \quad \|\varphi \vee \psi\| = \|\varphi\| \vee \|\psi\| \quad \|\neg\varphi\| = \neg\|\varphi\| \quad \|\varphi \to \psi\| = \neg\|\varphi\| \vee \|\psi\|$$

Per i quantificatori:

$$\| \exists x\, \varphi(x)\| = \bigvee \{ \| \varphi(\tau) \| : \tau \text{ è un B-nome in } M^B\} \quad \| \forall x\, \varphi(x)\| = \bigwedge \{ \| \varphi(\tau) \| : \tau \text{ è un B-nome in } M^B\}$$

dove M^B è la classe dei *B-nomi*, definita per ricorsione transfinita: un B-nome è una funzione il cui dominio è un insieme di B-nomi e il cui codominio è (un sottoinsieme di) B. Formalmente:

$M^{B}_0 = \varnothing$ $M^{B}_{a+1} = \{\tau : \tau \text{ funzione}, \mathrm{dom}(\tau) \subseteq M^{B}_a, \mathrm{ran}(\tau) \subseteq B\}$ $M^{B}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} M^{B}_a$ per λ ordinale limite $M^{B} = \bigcup_a M^{B}_a$

Il modello a valori booleani M^B è la struttura ottenuta equipaggiando M^B con le operazioni di appartenenza e uguaglianza a valori in B definite sopra.

A.6. Il teorema di completezza per B-modelli e il suo significato

Il risultato centrale di questa teoria è il seguente:

Teorema (Scott-Solovay). Sia M un modello transitivo di ZFC, $B \in M$ un'algebra di Boole completa. Allora M^B soddisfa tutti gli assiomi di ZFC nel senso che per ogni assioma φ di ZFC, $\|\varphi\| = 1$ in M^B. Inoltre, per ogni formula φ, $M^{B} \vDash \varphi$ se e solo se $\|\varphi\| = 1$.

Questo teorema stabilisce che il modello a valori booleani M^B è, dal punto di vista logico, un modello «pieno» di ZFC in cui la verità non è binaria ma è a valori nell'algebra B. Ogni assioma di ZFC è assolutamente vero (ha valore 1) in M^B; e la relazione di forcing del secondo capitolo corrisponde esattamente alla valutazione booleana nel seguente senso:

$p \Vdash \varphi$ (nella formulazione originale di Cohen) se e solo se $e(p) \leq \|\varphi\|$ (nella formulazione booleana)

dove $e : P \to B$ è l'embedding di P nell'algebra di Boole $B = RO(P)$.

Il collegamento con il filtro generico si recupera nel modo seguente. Sia G un filtro M-generico su P. Il filtro G si estende a un ultrafiltro U su B. Per ogni formula φ, la verità di φ in M[G] equivale a $\|\varphi\| \in U$. I modelli concreti M[G] si ottengono «collassando» il modello a valori booleani M^B lungo l'ultrafiltro U: due B-nomi $\tau, \sigma \in M^{B}$ sono identificati nel modello collassato se $\|\tau = \sigma\| \in U$, e l'appartenenza nel modello collassato è determinata da $\|\tau \in \sigma\| \in U$.

A.7. Algebre di Boole complete e logica intuizionistica: le algebre di Heyting

Una generalizzazione di grande importanza filosofica e matematica emerge quando si abbandona il requisito della complementazione dell'algebra e si passa alle *algebre di Heyting* — il corrispettivo algebrico della logica intuizionistica.

Un'*algebra di Heyting* è una struttura $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ dove $(H, \wedge, \vee, 0, 1)$ è un reticolo distributivo limitato e $\rightarrow$ è un'operazione di *implicazione interna* (o *residuo*) che soddisfa:

$a \wedge b \leq c$ se e solo se $a \leq b \rightarrow c$

Ogni algebra di Boole è un'algebra di Heyting con $b \rightarrow c = \neg b \vee c$; ma un'algebra di Heyting non è in generale un'algebra di Boole, perché la legge $\neg\neg b = b$ (la doppia negazione) può fallire. Il complemento in un'algebra di Heyting è definito come $\neg b = b \rightarrow 0$, e soddisfa $b \wedge \neg b = 0$ ma non in generale $b \vee \neg b = 1$.

Le algebre di Heyting complete (chiuse per join e meet infiniti) sono esattamente le strutture che compaiono come algebre dei sottooggetti nei *topos elementari* di Lawvere e Tierney — il che ci porta direttamente al tema dell'appendice successiva. Ma già a questo livello è possibile indicare una connessione filosoficamente rilevante con la genericità.

Nella logica intuizionistica, la verità di $\neg\neg\varphi$ non implica la verità di φ: la doppia negazione non è eliminabile. Questo ha una lettura precisa in termini di genericità. In un'algebra di Heyting H, l'operatore di doppia negazione $\neg\neg : H \rightarrow H$ è un *operatore di chiusura* (closure operator, o nucleo topologico) che individua la «parte booleana» di H: l'immagine di $\neg\neg$ è una sottoalgebra di Boole di H. Un elemento $b \in H$ soddisfa $\neg\neg b = b$ se e solo se b è un «aperto regolare» nel senso della costruzione RO vista sopra. Il generico — nell'algebra di Boole degli aperti regolari — è esattamente l'elemento che non è identificato dalla doppia negazione con qualcosa di più piccolo; è l'elemento la cui «regolarità» garantisce che esso sia pienamente determinato dall'interno dell'algebra, senza residui di indeterminatezza intuizionistica.

La costruzione del filtro generico su RO(P) è dunque, da questa prospettiva, il processo di «rendere booleana» una struttura che era originalmente intuizionistica: il parziale ordine P ha una logica interna intuizionistica (la relazione di forcing $p \Vdash \varphi$ non soddisfa in generale la legge del terzo escluso), ma il passaggio all'algebra degli aperti regolari RO(P) e la selezione di un ultrafiltro generico U su di essa producono un modello classico M[G] in cui ogni formula ha un valore di verità booleano determinato.

A.8. La c.c.c. algebrica e la preservazione dei cardinali

Ritorniamo ora, dalla prospettiva algebrica acquisita, sulla condizione della *countable chain condition* (c.c.c.) che nel secondo capitolo è stata invocata per garantire che il forcing di Cohen non collassi i cardinali di M.

In termini algebrici, un'algebra di Boole completa B soddisfa la c.c.c. se ogni antichain in B^+ (la parte positiva, cioè $B \setminus \{0\}$) è al più numerabile. La c.c.c. è una proprietà di «largeur topologica» dell'algebra: essa misura in quale misura l'algebra può contenere elementi reciprocamente incompatibili.

Il teorema fondamentale è il seguente:

Teorema. Sia M un modello transitivo di ZFC, $B \in M$ un'algebra di Boole completa che soddisfa la c.c.c. in M. Allora in ogni estensione generica M[G] di M mediante B, ogni cardinale di M rimane un cardinale di M[G]; in particolare, i cardinali di M non vengono collassati.

La dimostrazione usa la c.c.c. per mostrare che ogni funzione $f : \alpha \to \beta$ in M[G] (con α, β cardinali di M) è «approssimata» dall'interno di M: più precisamente, per ogni ordinalé α e ogni $b \in B^+$, esiste una funzione parziale $g \in M$ con dominio cofinalizzante in α tale che $\|f(\gamma) = g(\gamma)\| > 0$ per tutti γ nel dominio di g. Questo argomento usa la c.c.c. per controllare la «larghezza» delle approssimazioni in modo che gli ordinali di M non vengano superati da funzioni definibili in M[G].

Il punto filosoficamente rilevante è il seguente. La c.c.c. è la forma algebrica della condizione di *compatibilità globale* delle informazioni: in un'algebra c.c.c., non ci sono «insiemi di informazioni incompatibili» di cardinalità non numerabile. Questa condizione di compatibilità globale è ciò che garantisce che l'estensione generica non «dimentichi» troppo della struttura del modello di base — che l'informazione aggiunta dal filtro generico sia compatibile con la gerarchia cardinale già stabilita in M.

La genericità, in questo contesto, è compatibile con la struttura non perché vi sia indifferente, ma perché la attraversa con sufficiente cura da non distorcerla. Il filtro generico «porta informazione nuova» — la prova di ¬IC, il nuovo reale di Cohen, l'estensione M[G] — senza distruggere l'infrastruttura cardinale su cui quella informazione si organizza.

A.9. Forcing a due passi e iterazione: la struttura ricorsiva del generico

Una delle tecniche più potenti della teoria del forcing è l'*iterazione* delle nozioni di forcing: la costruzione di sequenze di estensioni generiche $M \subseteq M[G_0] \subseteq M[G_0][G_1] \subseteq \ldots \subseteq M[G_0][G_1]\ldots[G_]$ dove ciascun passo aggiunge un nuovo filtro generico rispetto al modello prodotto dal passo precedente. Questa tecnica è necessaria per dimostrare risultati che richiedono l'aggiunta di ω_1 o ω_2 molti reali generici — come la dimostrazione dell'ipotesi di Martin o la consistenza di $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ — e per costruire modelli di set theory con proprietà combinatorie complesse.

In termini algebrici, l'iterazione del forcing corrisponde al prodotto tensoriale delle algebre di Boole complete coinvolte. Se B_0 è l'algebra del primo passo e B_1 è l'algebra del secondo passo (definita internamente al modello $M[G_0]$, quindi «a valori in B_0»), l'algebra dell'iterazione a due passi è il *prodotto di composizione* $B_0 * B_1$, il cui carrier è l'insieme di tutti gli elementi b_1 del B_0-modello di B_1, con operazioni di join e meet appropriate.

Questa struttura ricorsiva rivela un aspetto della genericità che merita di essere sottolineato. In un'iterazione di forcing, ciascun filtro generico G è generico *rispetto al*

modello costruito dai passi precedenti. La genericità è, in questo senso, sempre relativa e sempre prospettica: ogni nuovo filtro generico è generico rispetto a ciò che lo ha preceduto, non rispetto a una struttura fissa. L'iterazione del forcing è dunque la costruzione di una torre ascendente di genericità relative — ognuna delle quali è completa rispetto al proprio modello di base, eppure è ecceduta dalla genericità del livello successivo.

Questa struttura — una gerarchia ascendente di genericità relative, ciascuna completa rispetto al proprio livello — è un'immagine matematica di grande potenza per la struttura del progresso scientifico che Badiou cercava di catturare con la sua teoria delle procedure di verità. Non esiste la genericità assoluta, il modello finale, l'enciclopedia completa: esiste sempre una struttura che, dal punto di vista di ciò che la precede, è generica — attraversa tutti gli insiemi densi di ciò che era già noto — e che è a sua volta ecceduta dal livello successivo. La genericità è l'operatore strutturale di questa ascensione, non il suo termine.

Appendice B. I Topos di Lawvere-Tierney e la Genericità Categoriale

B.1. La svolta categoriale: dal forcing agli sheaf

La teoria dei topos — sviluppata da Alexander Grothendieck a partire dalla fine degli anni Cinquanta come strumento per la geometria algebrica, poi radicalmente riformulata da F. William Lawvere e Myles Tierney agli inizi degli anni Settanta in chiave fondazionale — costituisce un terzo quadro concettuale, distinto ma connesso al forcing insiemistico, entro il quale la nozione di genericità riceve una formulazione di grande profondità e generalità. Il legame tra la teoria dei topos e il forcing non è soltanto analogico: esiste una connessione precisa e formale che è stata esplicitata a partire dai lavori di Lawvere, Johnstone, Mac Lane e Moerdijk, e che mostra come i modelli generici del forcing siano, in sostanza, un caso particolare di una costruzione categoriale molto più generale.

La parola chiave è *sheaf* (fascio). I fasci — originariamente introdotti da Jean Leray in topologia algebrica per catturare proprietà locali-globali degli spazi topologici — sono esattamente gli oggetti che compaiono come elementi di certi topos di Grothendieck, e il forcing coheniano può essere reinterpretato come la costruzione di un modello nella categoria degli sheaf su un certo sito. Questa reinterpretazione non soltanto unifica il forcing con la geometria algebrica (dove i fasci sono lo strumento fondamentale), ma rivela la struttura logica interna dei modelli generici come la logica *interna al topos* — una logica intuizionistica, in generale, che diventa classica sotto condizioni precise legate alla struttura booleana del sito.

B.2. Topos elementari: definizione e struttura logica interna

Un *topos elementare* (nel senso di Lawvere-Tierney) è una categoria $\mathcal{T}$ che soddisfa quattro condizioni. La prima è la presenza di tutti i limiti finiti: la categoria ha un oggetto terminale 1, un oggetto prodotto $A \times B$ per ogni coppia di oggetti, e un equalizzatore per ogni coppia di frecce parallele. La seconda è la presenza di oggetti esponenziali: per ogni coppia di oggetti A, B esiste un oggetto B^A e una freccia di valutazione $ev : B^A \times A \to B$ che soddisfa la proprietà universale dell'esponenziale. La terza è la presenza di un *classificatore di sottooggetti* (subobject classifier): un oggetto Ω e una freccia $\top : 1 \to \Omega$ tale che per ogni oggetto X e ogni sottooggetto $U \hookrightarrow X$ esista un'unica freccia caratteristica $\chi_u : X \to \Omega$ che fa commutare il diagramma di pullback:

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \top \\ X & \longrightarrow & \Omega \end{array} \qquad \chi_u$$

La quarta condizione — richiesta nella versione di Lawvere-Tierney ma non sempre nella versione di Grothendieck — è la presenza di un oggetto dei numeri naturali che soddisfa la proprietà di Peano categoriale.

L'oggetto Ω è il classificatore di sottooggetti, e gioca il ruolo dell'insieme $\{0, 1\}$ dei valori di verità nella teoria degli insiemi classica. In un topos non booleano, Ω può avere più di due elementi — anzi, può avere struttura molto ricca. L'algebra degli elementi globali di Ω — cioè l'insieme $\mathrm{Hom}(1, \Omega)$ delle frecce dall'oggetto terminale a Ω — è un'algebra di Heyting, non necessariamente booleana. Questa algebra di Heyting è la struttura dei valori di verità della *logica interna* del topos: la logica con cui si ragiona sugli oggetti e le frecce del topos.

B.3. La logica interna del topos e il linguaggio di Mitchell-Bénabou

La *logica interna* (o linguaggio interno) di un topos è un linguaggio tipato dipendente, detto *linguaggio di Mitchell-Bénabou*, che consente di formulare e dimostrare enunciati all'interno del topos usando la struttura categoriale come fondamento. I tipi del linguaggio sono gli oggetti del topos; i termini sono frecce; le formule sono sottooggetti; e i connettivi logici corrispondono alle operazioni sull'algebra di Heyting Ω.

Più precisamente: per ogni oggetto X del topos $\mathcal{T}$, i *predicati su X* sono le frecce $\varphi : X \to \Omega$ (o, equivalentemente, i sottooggetti di X). La congiunzione di due predicati $\varphi, \psi : X \to \Omega$ è la freccia $\langle \varphi, \psi \rangle \; ; \wedge : X \to \Omega$, dove $\wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega$ è la freccia meet interna. La disgiunzione è analoga. La negazione di φ è $\neg\varphi = \varphi \; ; \neg\Omega$, dove $\neg\Omega : \Omega \to \Omega$ è la freccia di negazione interna (definita come l'unica freccia che fa commutare il diagramma di pullback opportuno). La quantificazione esistenziale lungo una freccia $f : Y \to X$ corrisponde all'immagine del sottooggetto lungo f; la quantificazione

universale corrisponde al suo *aggiunto a destra* (right adjoint), definito tramite la proprietà universale del funtore immagine-diretta.

Questa logica interna è, in generale, *intuizionistica*: la legge del terzo escluso $\varphi \vee \neg\varphi = \top$ non vale in tutti i topos. Essa vale se e solo se l'algebra di Heyting Ω è booleana — se cioè Ω ha esattamente due elementi globali, corrispondenti al vero e al falso. I topos booleani sono quelli la cui logica interna è classica, e questi corrispondono precisamente ai casi in cui la struttura del topos è «sufficientemente discreta» da rendere determinata ogni proposizione.

B.4. I topos di Grothendieck e i fasci su un sito

La classe dei topos più ampiamente usata in matematica è quella dei *topos di Grothendieck*, costruiti come categorie di fasci su un *sito*. Un sito è una piccola categoria $\mathscr{C}$ equipaggiata con una *topologia di Grothendieck* J: per ogni oggetto $C \in \mathscr{C}$, J(C) è una famiglia di *coperture* di C — famiglie di frecce con codominio C che soddisfano condizioni di coerenza (stabilità per composizione, per pullback, e la condizione di identità).

La scelta del sito codifica la struttura «topologica» dell'informazione: le coperture dicono quando una famiglia di dati locali è sufficiente a determinare univocamente un dato globale. Un *fascio su* $(\mathscr{C}, J)$ è un funtore controvariante $F : \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$ che soddisfa la condizione di discesa: per ogni copertura $\{f_i : C_i \to C\}$ in J(C), la sequenza

$$F(C) \to \prod_i F(C_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(C_i \times_C C_j)$$

è un equalizzatore. Il topos $\mathbf{Sh}(\mathscr{C}, J)$ è la categoria di tutti i fasci sul sito $(\mathscr{C}, J)$.

Il classificatore di sottooggetti Ω nel topos $\mathbf{Sh}(\mathscr{C}, J)$ è il fascio dei *sieves* (crivelli): per ogni oggetto $C \in \mathscr{C}$, $\Omega(C)$ è l'insieme dei sottooggetti di J chiusi per composizione su C, cioè dei «filtri di copertura» su C. La ricchezza di Ω — il fatto che abbia molti elementi globali in generale — è la fonte della logica intuizionistica del topos.

B.5. Il forcing come topos di fasci su un parziale ordine

Il legame con il forcing insiemistico si stabilisce nel modo seguente. Sia $(P, \leq)$ un parziale ordine. Si considera P come una categoria: gli oggetti sono le condizioni $p \in P$, e c'è una freccia $p \to q$ se e solo se $p \leq q$. La topologia di Grothendieck più naturale su questa categoria è la *topologia di Zariski* (o *topologia delle anticatene massimali*): una famiglia $\{p_i \to p\}$ è una copertura di p se ogni elemento $q \leq p$ è compatibile con qualche p_i.

Con questa topologia, il topos $\mathbf{Sh}(P, J)$ dei fasci su (P, J) è strettamente connesso al forcing su P. Più precisamente, gli oggetti del topos $\mathbf{Sh}(P, J)$ sono esattamente i *P-nomi generalizzati* — le strutture che nel forcing si chiamano «nomi di insiemi» — e la logica

interna del topos corrisponde alla relazione di forcing: una formula φ è «vera nel contesto p» nel senso della logica interna se e solo se $p \Vdash \varphi$ nel senso del forcing.

L'algebra di Heyting Ω del topos Sh(P, J) è, in questo caso, l'algebra degli aperti della topologia di Alexandrov su P: i sottooggetti del terminale 1 corrispondono ai sottooggetti di P che sono «chiusi verso l'alto» nella topologia. Se P soddisfa la c.c.c., allora Ω è un'algebra di Boole — il topos è booleano — e la logica interna è classica. Questo è precisamente il caso del forcing di Cohen: la nozione di forcing $\mathrm{Fn}(\omega_2 \times \omega, 2)$ soddisfa la c.c.c., il topos corrispondente è booleano, e la logica interna è quella classica bivalente.

B.6. Il classificatore di sottooggetti generico e la genericità nel topos

La nozione di *oggetto generico* in un topos — che è centrale per la comprensione della genericità da questa prospettiva — emerge dalla struttura del classificatore di sottooggetti Ω. Ogni freccia $\chi : X \to \Omega$ classifica un sottooggetto di X: l'oggetto $U = \chi^{-1}(\top)$ è il «luogo di verità» di χ in X. L'elemento universale $\top : 1 \to \Omega$ è il sottooggetto generico del terminale: esso è l'elemento di Ω «da cui tutti gli altri si deducono per pullback».

Questa struttura è un'istanza di una nozione più generale che Lawvere ha introdotto sotto il nome di *oggetto generico*: in una categoria con struttura sufficiente, un oggetto G è generico per una proprietà P se ogni oggetto con proprietà P è immagine di G lungo qualche freccia. L'oggetto generico è il rappresentante universale della proprietà, l'oggetto da cui tutti gli altri con quella proprietà si ottengono per «specializzazione» (pullback, morfismo, immagine).

Questa nozione di genericità categoriale risuona con le nozioni già incontrate. Il punto generico di Grothendieck in geometria algebrica — il punto η di Spec(A) il cui ideale associato è (0) — è esattamente un oggetto generico nel senso di Lawvere: ogni altro punto di Spec(A) si ottiene da η per specializzazione (pullback lungo l'inclusione dell'ideale massimale corrispondente). Il classificatore di sottooggetti Ω nel topos è l'oggetto generico per i sottooggetti: ogni sottooggetto $U \hookrightarrow X$ si ottiene da $\top : 1 \to \Omega$ per pullback lungo la freccia caratteristica $\chi_u : X \to \Omega$.

B.7. La topologia di Lawvere-Tierney: operatori di chiusura e struttura modale

Una delle contribuzioni più eleganti di Lawvere e Tierney alla teoria dei topos è la caratterizzazione delle *topologie interne* (o *topologie di Lawvere-Tierney*) come operatori sul classificatore di sottooggetti Ω. Una topologia di Lawvere-Tierney è una freccia $j : \Omega \to \Omega$ che soddisfa tre condizioni:

$j \circ \top = \top$ (preserva il vero) $j \circ j = j$ (è idempotente) $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$ (commuta con la congiunzione)

Un tale operatore j è un *nucleo topologico* (o *operatore di chiusura*) su Ω: esso rappresenta un'operazione di «completamento» dei sottooggetti che è idempotente e compatibile con la struttura logica.

La connessione con la genericità è la seguente. L'operatore di doppia negazione $\neg\neg : \Omega \to \Omega$ è sempre una topologia di Lawvere-Tierney. I *j-fasci* — i fasci che soddisfano la condizione aggiuntiva di essere chiusi rispetto a j — formano un sottotopos del topos dato. Quando $j = \neg\neg$, i $\neg\neg$-fasci sono esattamente i fasci su cui la logica interna è classica (booleana): il topos dei $\neg\neg$-fasci è il «completamento booleano» del topos originale, esattamente come $RO(P)$ è il completamento booleano del parziale ordine P.

Il filtro generico G nel forcing può essere interpretato come una *localizzazione* lungo la topologia $\neg\neg$: esso «seleziona» una componente booleana del topos a valori in Ω, e questa componente è esattamente il modello $M[G]$. La costruzione del filtro generico è dunque, categorialmente, la scelta di un punto del *localizzato booleano* del topos dei fasci su P — un punto che non esiste come oggetto del topos di partenza (perché il topos non è booleano in generale), ma che esiste nel localizzato booleano, il quale è il topos dei fasci sul completamento booleano $RO(P)$.

B.8. Il topos dei fasci equivarianti e la genericità rispetto a un gruppo

Una generalizzazione particolarmente suggestiva della nozione di genericità emerge quando si considera il topos dei fasci equivarianti rispetto all'azione di un gruppo, detto *topos di Joyal-Tierney* o *topos classificante*.

Sia G un gruppo profinito (limite inverso di gruppi finiti). Il topos delle G-azioni discrete (insiemi su cui G agisce in modo continuo rispetto alla topologia profinita) è un topos di Grothendieck, e la sua logica interna è classica. Questo topos è il *topos classificante* delle G-torsor: gli oggetti generici del topos sono esattamente i G-torsor, cioè le G-azioni libere e transitive.

Nel contesto della geometria algebrica, il gruppo fondamentale profinito di Grothendieck $\pi_1(X, \bar{x})$ — il gruppo di Galois assoluto nel caso $\bar{x} = \mathrm{Spec}(\bar{k})$ per un campo k — agisce sui fasci étales di X, e il topos degli étale-fasci è un topos classificante per $\pi_1(X, \bar{x})$-torsor. In questo contesto, il punto generico di X nel senso di Grothendieck corrisponde esattamente all'oggetto generico del topos classificante: esso è il G-torsor universale da cui tutti gli altri si ottengono per specializzazione.

Questa connessione — tra genericità insiemistica nel senso del forcing, genericità topologica nel senso del punto generico di Grothendieck, e genericità categoriale nel senso del G-torsor universale — rivela che il concetto che questo trattato ha cercato di analizzare ha una radice matematica comune di grande profondità: la nozione di *oggetto universale* per una classe di strutture, l'oggetto da cui tutti gli altri si ottengono per

pullback, per specializzazione, per morfismo. Il generico non è il privo-di-determinazione nel senso vago: è l'universalmente rappresentante, il portatore di tutta la struttura comune della classe senza essere legato ad alcuna caratteristica accidentale di un individuo specifico.

B.9. Implicazioni filosofiche: l'ontologia categoriale e la genericità

L'approccio per topos suggerisce una ridefinizione dell'ontologia che è alternativa — e per certi aspetti complementare — a quella di Badiou. Mentre Badiou identifica l'ontologia con la teoria degli insiemi (ZFC), l'approccio categoriale propone di identificare l'ontologia con la struttura delle categorie e dei funtori: non gli insiemi come oggetti primitivi, ma le *relazioni* (frecce, morfismi, trasformazioni naturali) come il fondamento.

In questa prospettiva, il generico non è un filtro che attraversa insiemi densi in un modello: è un *oggetto universale* in una categoria, definito dalla proprietà universale che ogni oggetto della classe data si ottiene da esso per un unico morfismo. La genericità è la forma categoriale dell'universalità: non l'universale come astrazione predicativa, non come sostanza platonica, ma come *oggetto da cui tutti gli altri si specializzano*.

Questa ridefinizione categoriale dell'universale ha conseguenze filosofiche che vanno nella stessa direzione di quelle identificate nel sesto capitolo, ma con un'accentuazione diversa. Il generico categoriale non è definito come il residuo delle esclusioni (non è definito per negazione), ma come il *portatore positivo* di tutta la struttura comune della classe. Esso non è ciò che sopravvive a tutte le esclusioni: è ciò da cui tutto il resto si genera per specializzazione. La sua genericità è, in un certo senso, una *genericità produttiva* anziché residuale: esso produce, attraverso morfismi, tutta la varietà degli oggetti specifici.

Questi due modi di intendere la genericità — residuale (il generico come residuo di tutte le esclusioni) e produttivo (il generico come fonte di tutte le specializzazioni) — sono, da un punto di vista tecnico, duali tra loro nel preciso senso categoriale: essi corrispondono alla dualità tra limiti e colimiti, tra pullback e pushforward, tra la topologia «verso il basso» e la topologia «verso l'alto» di un parziale ordine. Questa dualità formale tra le due accezioni di genericità è, forse, la scoperta matematica più profonda che il lungo percorso di questo trattato ha permesso di articolare: la genericità come concetto ha una struttura duale, e le due facce della dualità corrispondono precisamente alle due strategie epistemologiche — residuale e produttiva, negativa e positiva, topologica e categoriale — che i diversi domini analizzati hanno dispiegato.

Appendice C. Dettagli Tecnici sul Forcing di Sacks e di Mathias

C.1. La struttura degli alberi perfetti e la topologia di Baire sugli alberi

Per sviluppare la teoria del forcing di Sacks con la necessaria precisione, è utile introdurre una topologia sullo spazio degli alberi perfetti che espliciti la struttura topologica sottostante alla minimalità.

Sia $2^{<\omega}$ l'insieme di tutte le sequenze finite di 0 e 1, inclusa la sequenza vuota $\varnothing$. Una *sequenza* $\sigma \in 2^{<\omega}$ ha *lunghezza* $|\sigma|$. La relazione di prefisso è $\sigma \subseteq \tau$ se σ è un prefisso iniziale di τ. Due sequenze σ, τ sono *incompatibili* ($\sigma \perp \tau$) se nessuna è prefisso dell'altra.

Un *albero* su $2^{<\omega}$ è un sottoinsieme $T \subseteq 2^{<\omega}$ chiuso per prefissi: se $\tau \in T$ e $\sigma \subseteq \tau$ allora $\sigma \in T$. Un nodo $\sigma \in T$ è *terminale* se non ha successori in T (non esistono $\tau \in T$ con $\sigma \subset \tau$). Un albero senza nodi terminali si dice *senza foglie* o *infinitamente biforcato* se ogni nodo ha almeno un successore. Un albero T è *perfetto* se è senza foglie e per ogni $\sigma \in T$ esistono $\tau_0, \tau_1 \in T$ incompatibili con $\sigma \subset \tau_0$ e $\sigma \subset \tau_1$ (ogni nodo ha almeno due successori).

Il *corpo* (body) di T è l'insieme dei rami infiniti:

$$[T] = \{f \in 2^{\omega} : \forall n \in \omega,\ f{\restriction}n \in T\}$$

dove $f{\restriction}n$ è la restrizione di f ai primi n valori. Il corpo [T] è sempre un sottoinsieme chiuso di 2^{ω} nella topologia prodotto; è perfetto (nel senso topologico: chiuso e senza punti isolati) se e soltanto se T è un albero perfetto nel senso combinatorio.

Il forcing di Sacks $\mathbb{S} = (\text{PerfTrees}, \supseteq)$ può essere dotato della topologia generata dagli insiemi della forma $\{T \in \text{PerfTrees} : \sigma \in T\}$ per $\sigma \in 2^{<\omega}$. In questa topologia, gli insiemi densi aperti di $\mathbb{S}$ sono esattamente gli insiemi $D \subseteq \text{PerfTrees}$ tali che per ogni $T \in \text{PerfTrees}$ esiste $S \in D$ con $S \subseteq T$. Il filtro generico G su $\mathbb{S}$ è M-generico se interseca ogni tale insieme denso appartenente a M.

C.2. La lemmatizzazione della minimalità: il lemma di fusione

Il risultato tecnico centrale per la dimostrazione della minimalità del reale di Sacks è il *lemma di fusione* (fusion lemma), che è uno dei risultati più eleganti della teoria del forcing.

Definizione. Una sequenza di condizioni $(T_n)_{n\in\omega}$ in $\mathbb{S}$ si dice *fusione compatibile* se: (a) $T_{n+1} \subseteq T_n$ per ogni n (ogni condizione estende la precedente) (b) Per ogni $\sigma \in 2^{<\omega}$ con $|\sigma| \leq n$, se $\sigma \in T_n$ allora $\sigma \in T_{n+1}$ (il n-esimo livello dell'albero è stabilizzato entro il passo n)

Lemma di Fusione (Sacks). Ogni sequenza di fusione compatibile $(T_n)_{n\in\omega}$ in $\mathbb{S}$ ha una *fusione*:

$$T_\infty = \bigcap_n T_n$$

che è ancora un albero perfetto (cioè un elemento di $\mathbb{S}$), con $[T_\infty] = \bigcap_n [T_n]$.

La dimostrazione verifica che T_∞ è un albero perfetto: è chiuso per prefissi (per intersezione), è senza foglie (per la condizione (b) di stabilizzazione dei livelli), e ogni nodo ha due successori (perché ciascun T_n è perfetto e la stabilizzazione garantisce che i successori sopravvivano nella fusione).

Il lemma di fusione permette di costruire condizioni «ad ω-passi» nel forcing di Sacks: si può rafforzare una condizione T in modo che soddisfi una famiglia numerabile di requisiti $\{D_n\}_{n\in\omega}$ (insiemi densi appartenenti a M) costruendo iterativamente T_{n+1} come raffinamento di T_n che soddisfa D_n, e prendendo T_∞ come fusione. Questa costruzione è il cuore della dimostrazione che il forcing di Sacks produce un reale minimale.

C.3. La dimostrazione della minimalità: il teorema di Sacks

Teorema (Sacks, 1971, dettaglio della dimostrazione). Sia M un modello transitivo numerabile di ZFC e g il reale di Sacks generico su M. Per ogni $f \in 2^\omega \cap M[g]$, si ha $f \in M$ oppure f è Turing-equivalente a g.

Schema della dimostrazione. Sia τ un nome in $\mathbb{S}^M$ tale che $\tau_G = f \in 2^\omega$. Si deve mostrare che o $f \in M$ oppure f è Turing-equivalente a g.

Si supponga che $f \notin M$. Bisogna mostrare che g è Turing-computabile da f (l'altra direzione, f da g, è più semplice). Si costruisce una funzione di Turing che, con oracolo f, calcola g.

Il punto cruciale è la costruzione di una condizione $T \in \mathbb{S}$ che sia *f-omogena per τ*: per ogni $\sigma \in T$, la decisione sul valore $\tau(n)$ nel corpo $[T_\sigma]$ (dove $T_\sigma = \{\rho \in T : \rho \supseteq \sigma\}$ è il sottoalbero a partire da σ) è uniforme — ogni ramo del corpo $[T_\sigma]$ produce lo stesso valore di $\tau(n)$. Questo si ottiene per una costruzione iterata usando il lemma di fusione:

Al passo n, si raffina la condizione corrente T_{n-1} in modo che per il nodo σ del livello n, esista un sottoalbero perfetto $T_\sigma \subseteq T_{n-1}\restriction\sigma$ tale che tutti i rami di T_σ producono lo stesso valore per $\tau(n)$. La scelta del valore «giusto» — 0 o 1 — viene determinata quale dei due possiede il sottoalbero perfetto di quel tipo; poiché la condizione è determinata da f (che indica quale valore è quello «scelto» dalla procedura), si ottiene che la sequenza dei valori è esattamente f, e la struttura dei nodi di T_∞ che «certificano» ciascun valore è esattamente la codifica di g.

La costruzione usa la proprietà degli alberi perfetti che ogni sottoinsieme chiuso perfetto ha un sottoalbero perfetto omogeneo per ogni proprietà Borel-misurabile (teorema di Galvin-Prikry nella versione per alberi perfetti). Questa proprietà di omogeneità è la ragione profonda per cui il reale di Sacks è minimale: ogni informazione codificabile in un ramo di un albero perfetto può essere resa omogenea su un sottoalbero perfetto, il che significa che non c'è «informazione parziale» stabile nell'albero.

C.4. Il forcing di Mathias: struttura tecnica e il teorema di Ramsey infinito

Il forcing di Mathias $\mathcal{M}$ usa come condizioni le coppie (s, A) con $s \in [\omega]^{<\omega}$ e $A \in [\omega]^\omega$ con $\max(s) < \min(A)$ (o $s = \varnothing$). L'ordinamento è:

$$(t, B) \leq (s, A) \Leftrightarrow s \subseteq t, B \subseteq A, t \setminus s \subseteq A$$

Il reale di Mathias $r = \bigcup \{s : \exists A, (s,A) \in G\}$ è un sottoinsieme infinito di ω.

Lemma di densità per $\mathcal{M}$. Per ogni $(s, A) \in \mathcal{M}$ e ogni $n \in \omega$, l'insieme

$$D_n = \{(t, B) \in \mathcal{M} : n \in t \text{ oppure } n < \min(B)\}$$

è denso. Questo garantisce che il reale di Mathias r «decide» ogni naturale: r è infinito con $\min(r \setminus s) > \max(s)$ per il segmento iniziale s corrispondente alla condizione del filtro.

Lemma di omogeneità di Mathias. Per ogni $(s, A) \in \mathcal{M}$ e ogni partizione $A = X_0 \cup X_1$ con X_0, X_1 definibili da parametri in M, esiste $B \in [A]^\omega$ omogeneo: $B \subseteq X_0$ oppure $B \subseteq X_1$, tale che $(s, B) \in \mathcal{M}$. Questo segue dal teorema di Ramsey infinito applicato internamente a M.

Teorema di Ramsey-genericità di r. Per ogni colorazione 2-cromatica $X \subseteq [\omega]^2$ definibile in M, esiste $H \subseteq r$ infinito con $[H]^2 \subseteq X$ oppure $[H]^2 \cap X = \varnothing$.

La dimostrazione procede per forcing. L'insieme

$$D_X = \{(s, A) : \exists B \in [A]^\omega \text{ omogeneo per } X\}$$

è denso in $\mathcal{M}$ (per il lemma di omogeneità). Ogni condizione nel filtro generico G che appartiene a D_X produce quindi un sottoinsieme $B \subseteq A$ omogeneo, e la genericità di G garantisce che $G \cap D_X \neq \varnothing$. Il sottoinsieme $H = B \cap r$ è quindi omogeneo per X e infinito.

C.5. Confronto tra Sacks, Cohen, e Mathias: la tabella delle proprietà

I tre reali generici — di Cohen (c), di Sacks (g), di Mathias (r) — si differenziano per le proprietà di genericità che soddisfano. Le proprietà principali sono le seguenti.

Per la *minimalità del grado di Turing*: g è minimale (nessun reale intermedio in grado di Turing in M[g]); c non è minimale; r non è minimale.

Per la *proprietà di Ramsey*: r è Ramsey-generico rispetto a M; g non è Ramsey-generico in generale; c non è Ramsey-generico.

Per la *proprietà di Baire*: tutti e tre i reali generici generano estensioni in cui ogni insieme di reali ha la proprietà di Baire rispetto alla topologia appropriata. Ma la *topologia rispetto a cui* la proprietà è definita varia: per c è la topologia prodotto standard di Cantor; per g è la topologia degli alberi perfetti; per r è la topologia di Mathias su [ω]^ω.

Per la *Lebesgue-misurabilità*: c è Lebesgue-misurabile (ha misura zero come singoletto, ma genera un'estensione in cui ogni insieme di Borel è misurabile); g ha misura zero come ramo generico di un albero perfetto di misura arbitrariamente piccola (il forcing di Sacks è un forcing *di misura zero*); r appartiene a [ω]^ω che non ha una misura di Lebesgue canonica, ma la struttura Ramsey lo rende «grande» in ogni senso combinatorio.

Per la *relazione con l'universo costruibile* L: tutti e tre i reali non appartengono a L (se M soddisfa V = L); ma la loro distanza da L è diversa — il reale di Sacks minimizza la «perturbazione» dell'universo costruibile, mentre il reale di Mathias la massimizza.

C.6. Forcing di Laver, Silver, e Prikry: ulteriori nozioni di genericità

Oltre ai tre tipi principali esaminati nel settimo capitolo, la teoria del forcing conosce altre nozioni di genericità che vale la pena di menzionare, sia per completezza sia per la luce che gettano sulla struttura del concetto.

Il *forcing di Laver* usa come condizioni gli *alberi di Laver*: alberi T su ω con radice stem(T) tale che ogni nodo al di sopra della radice ha successori per ogni naturale (non solo due). Il reale di Laver è, come il reale di Sacks, minimale in grado di Turing, ma ha la proprietà aggiuntiva di *dominare* ogni funzione del modello di base: per ogni $f \in \omega^\omega \cap M$, il reale di Laver l soddisfa $l(n) > f(n)$ per tutti gli n abbastanza grandi. Il forcing di Laver è dunque il forcing che produce reali «grandi» in senso computazionale (dominanti) pur essendo minimi in grado di Turing — una combinazione sorprendente che rivela la possibilità di separare due nozioni di «grandezza» di un reale.

Il *forcing di Silver* usa come condizioni gli insiemi di condizioni di Cohen con supporto in un insieme cofinale: esso è un forcing «Sacks-su-ω_1» che produce un reale minimale rispetto a *tutti* i modelli del forcing, non soltanto rispetto al modello di base. Il forcing di Silver ha applicazioni nella teoria dei cardinali singolari e nella combinatoria di ω_1.

Il *forcing di Prikry* — introdotto per le applicazioni alla teoria dei cardinali misurabili — usa come condizioni le coppie (s, A) dove A appartiene a un ultrafiltro non principale κ-completo su un cardinale misurabile κ. Esso produce una sequenza ω-cofinale nel cardinale misurabile κ senza aggiungere insiemi limitati in κ: in un senso preciso, cambia la struttura cofinale di κ senza aggiungere nuova informazione sugli insiemi di rango inferiore a κ. Il forcing di Prikry è la forma più pura di genericità relativa a una struttura di filtro ultrafinale, e la sua struttura rivela le connessioni più profonde tra i grandi cardinali e il forcing.

Questa molteplicità di nozioni di forcing — e dunque di nozioni di genericità — conferma la tesi filosofica del settimo capitolo: la genericità è irreducibilmente plurale, parametrizzata dalla struttura di eccezionalità rispetto a cui si definisce, e nessuna singola nozione di forcing cattura l'intero fenomeno della «non-eccezionalità strutturale».

Appendice D. Grandi Cardinali, il Modello di Solovay e la Determinatezza

D.1. La gerarchia dei grandi cardinali: dall'inaccessibile al superstringente

La gerarchia dei grandi cardinali — gli assiomi di grande cardinalità che estendono ZFC — è una delle strutture più profonde e ricche della teoria degli insiemi moderna. Essa non soltanto produce modelli con proprietà di regolarità degli insiemi di reali (come mostrato dall'ottavo capitolo), ma ha implicazioni di ampia portata sulla struttura interna dell'universo degli insiemi, sul rapporto tra determinatezza e forza assiomatica, e sulla natura del «confine superiore» della gerarchia.

Nella presentazione che segue, si adotta la seguente convenzione uniforme: κ è sempre un cardinale infinito, e le proprietà di κ sono enunciate in termini di *embedding elementari* — omomorfismi iniettivi $j : V \to M$ dal universo V degli insiemi a un modello transitivo M di ZFC che preservano tutta la struttura del primo ordine.

Cardinale inaccessibile. κ è inaccessibile se è un cardinale limite regolare con $2^\alpha < \kappa$ per ogni $\alpha < \kappa$. Equivalentemente, V_κ è un modello di ZFC (il rango κ della gerarchia di Von Neumann è un universo della teoria degli insiemi). L'inaccessibilità è la più debole delle grandi cardinalità nel senso che non è caratterizzata da embedding elementari.

Cardinale Mahlo. κ è un cardinale Mahlo se è inaccessibile e l'insieme dei cardinali inaccessibili inferiori a κ è stazionario in κ: ogni insieme chiuso cofinale in κ contiene un cardinale inaccessibile. I cardinali Mahlo formano una gerarchia più fine: κ è Mahlo se è inaccessibile e stazionariamente Mahlo; κ è 2-Mahlo se è Mahlo e stazionariamente Mahlo nell'insieme dei cardinali Mahlo; e così via per ogni ordinale α.

Cardinale misurabile. κ è misurabile se esiste un ultrafiltro non principale κ-completo su κ: un filtro U su $\mathcal{P}(\kappa)$ tale che $\cap\{A \in U : A \subseteq \kappa\} = \varnothing$ (non principale), e per ogni famiglia $\{A\alpha\}\{a<\gamma\}$ *con* $\gamma < \kappa$ *e* $Aa \in U$, *si ha* $\cap\{\alpha<\gamma\}\ A\alpha \in U$ (κ-completo). L'esistenza di un tale ultrafiltro equivale all'esistenza di un embedding elementare non banale $j : V \to M$ con punto critico κ (il punto critico è il più piccolo ordinale su cui j non è l'identità).

I cardinali misurabili sono molto più forti dei cardinali Mahlo: un cardinale misurabile è Mahlo, anzi è il limite di cardinalità Mahlo. L'esistenza di un cardinale misurabile implica la consistenza di ZFC + «esiste un cardinale Mahlo» per ogni ordinale α.

Cardinale di Woodin. κ è un cardinale di Woodin (o Woodin-cardinale) se per ogni funzione $f : \kappa \to \kappa$ esiste $\alpha < \kappa$ con $\{f(\beta) : \beta < \alpha\} \subseteq \alpha$ (α è chiuso rispetto a f) e un embedding elementare $j : V \to M$ con punto critico α tale che $j(f)(\alpha) = f(\alpha)$ e $V_{j(f)(\alpha)} \subseteq M$. I cardinali di Woodin sono strettamente più deboli dei cardinali *forti* (strong cardinals) ma più forti dei cardinali misurabili in modo appropriato. La loro importanza risiede nel legame diretto con la determinatezza proiettiva e con la teoria degli insiemi descrittivi.

Cardinale supercompatto. κ è supercompatto se per ogni $\lambda \geq \kappa$ esiste un embedding elementare $j : V \to M$ con punto critico κ tale che $j(\kappa) > \lambda$ e $M^{\lambda} \subseteq M$ (M è chiuso per sequenze di lunghezza λ). I cardinali supercompatti sono molto più forti dei cardinali di Woodin e hanno implicazioni sulla struttura globale dell'universo degli insiemi.

D.2. La costruzione del modello di Solovay: dettaglio tecnico

La costruzione del modello di Solovay descritta nell'ottavo capitolo richiede alcune precisazioni tecniche sulla nozione di *nome simmetrico* e sul modello degli insiemi ereditariamente definibili con parametri reali.

La nozione di forcing Coll(ω, <κ). Per κ inaccessibile, si definisce:

$$\mathrm{Coll}(\omega, <\kappa) = \cup_{\{\alpha<\kappa\}} \mathrm{Fn}(\omega, \alpha)$$

dove $\mathrm{Fn}(\omega, \alpha)$ è l'insieme delle funzioni parziali finite da ω a α. Questo è un forcing *di collasso* che rende ogni ordinale $\alpha < \kappa$ numerabile nel modello esteso. Un elemento $p \in \mathrm{Coll}(\omega, <\kappa)$ è una funzione parziale finita $p : \omega \to \cup_{\{\alpha<\kappa\}} \alpha$; l'ordinamento è l'inclusione inversa delle funzioni.

Il filtro generico G su $\mathrm{Coll}(\omega, <\kappa)$ determina una suriezione $g : \omega \to \kappa$ che collassa κ a ω: ogni ordinale $\alpha < \kappa$ è nel range di g, dunque κ diventa numerabile in M[G], e $\aleph_1^{M[G]} = \kappa$.

Il modello di Solovay $\mathcal{S}$. Sia $\mathcal{G}$ il gruppo di automorfismi di $\mathrm{Coll}(\omega, <\kappa)$ (le permutazioni di $\omega \times \cup_{\{\alpha<\kappa\}} \alpha$ che preservano la struttura del forcing). Un P-nome

τ è *simmetrico* rispetto a un sottogruppo $H \leq \mathscr{G}$ se l'orbita di τ sotto l'azione di H è finita. Un P-nome è *hereditariamente simmetrico* (HS) se è simmetrico e tutti i suoi «sotto-nomi» sono simmetrici. Il modello di Solovay è:

$\mathcal{S} = \{ \text{val}(\tau, G) : \tau \in \text{HS} \}$

dove val(τ, G) è l'interpretazione del nome τ nel filtro G. Si dimostra che $\mathcal{S}$ è un modello di ZF + DC (con DC il principio di dipendenza numerabile) in cui ogni insieme di reali ha la proprietà di Baire, è Lebesgue-misurabile, e ha la proprietà di Ramsey.

Il teorema di Shelah sulla necessità. La prova di Shelah (1984) che la misurabilità di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ implica che ω_1 è inaccessibile in L procede come segue. Si supponga che in un modello M di ZF + DC ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ sia Lebesgue-misurabile. Si considera la misura di Lebesgue μ su [0,1]. Poiché ogni sottoinsieme di [0,1] è misurabile, la misura μ estende la misura di Lebesgue standard a tutti i sottoinsiemi — essa è una *misura completa* su $\mathscr{P}([0,1])$.

Una misura completa su [0,1] che estende quella di Lebesgue e che soddisfa DC è una *misura non-principalizzabile*: essa non può essere il limite di misure sui Boreliani in modo che rispetti la misurabilità di tutti i sottoinsiemi. Shelah dimostra che l'esistenza di tale misura implica che ω_1 ha la proprietà di essere *inaccessibile dal di sotto* in L: ogni ordinale $\alpha < \omega_1$ che appartiene a L è tale che $2^\alpha < \omega_1^L$. Questo è precisamente la condizione che ω_1 sia un cardinale inaccessibile nel modello costruibile L.

D.3. Il teorema di Martin-Steel: la determinatezza proiettiva

Il teorema di Martin-Steel (1989) stabilisce la determinatezza di ogni gioco nella classe Π^1_{n+1} sotto l'ipotesi di n cardinali di Woodin con un cardinale misurabile superiore.

I giochi di Gale-Stewart. Un gioco infinito di Gale-Stewart su un insieme $A \subseteq \omega^\omega$ si svolge tra due giocatori I e II che alternano mosse in ω, costruendo una sequenza $f = (f(0), f(1), f(2), \ldots) \in \omega^\omega$. Il giocatore I vince se $f \in A$; il giocatore II vince se $f \notin A$. Una *strategia* per il giocatore I è una funzione $\sigma : \omega^{<\omega} \to \omega$ che specifica la mossa di I in ogni posizione delle mosse di II. Una strategia σ è *vincente* se ogni gioco in cui I segue σ produce una sequenza in A.

Il teorema di Borel-determinatezza. Ogni gioco con insieme di vincita Borel è determinato. Questo è dimostrato da Martin (1975) usando soltanto ZFC.

La gerarchia proiettiva. Gli insiemi proiettivi di reali sono definiti dalla gerarchia:

Σ^1_1 = gli insiemi analitici (immagini continue di Borel) Π^1_1 = i complementi degli analitici (co-analitici) Σ^1_{n+1} = le immagini continue dei Π^1_n Π^1_{n+1} = i complementi dei Σ^1_{n+1}

Teorema (Martin-Steel, 1989). Se esistono n cardinali di Woodin con un cardinale misurabile al di sopra di tutti, allora ogni gioco con insieme di vincita Π^1_{n+1} (o equivalentemente Σ^1_{n+1}) è determinato.

Questo teorema stabilisce la connessione precisa tra la gerarchia dei cardinali di Woodin e la gerarchia di determinatezza: ogni passo nella scala dei grandi cardinali corrisponde a un livello più profondo della gerarchia proiettiva su cui la determinatezza vale.

D.4. Il teorema di Woodin sulla δ^1_2 e la struttura del «V ottimale»

Una delle scoperte più recenti e importanti nella teoria degli insiemi di grandi cardinali è il programma di W. Hugh Woodin per identificare la «struttura canonica» dell'universo degli insiemi sotto grandi ipotesi cardinali.

Il teorema fondamentale è il seguente:

Teorema (Woodin). Se esistono infiniti cardinali di Woodin, allora la teoria degli insiemi proiettivi — la teoria di primo ordine della struttura $(\mathbb{R}, \in)$ dove si quantifica sui sottoinsiemi proiettivi di $\mathbb{R}$ — è *completa* e *invariante sotto il forcing*: ogni enunciato sulla struttura proiettiva ha un valore di verità determinato che non cambia in nessuna estensione generica.

Questo risultato è straordinario dal punto di vista del presente trattato: esso mostra che sotto ipotesi di grandi cardinali sufficientemente forti, la genericità — nel senso del forcing — smette di essere una fonte di variabilità per la struttura proiettiva dei reali. Il forcing non può aggiungere nuovi reali proiettivi né cambiare le proprietà proiettive di quelli già esistenti. La genericità, a questo livello della gerarchia, è «assorbita» dalla struttura dei grandi cardinali: ogni reale generico che un forcing potrebbe aggiungere è «già lì» in un senso preciso — è già codificato nella struttura proiettiva di V sotto grandi cardinali.

D.5. Grandi cardinali e il problema di Hamkins: il pluralismo del multiverso

La posizione filosofica di Joel Hamkins sul *multiverso insiemistico* propone che tutti i modelli di ZFC — ogni universo che un forcing potrebbe produrre, ogni estensione generica — siano ugualmente «reali»: non esiste «l'universo V» privilegiato, ma una moltitudine di universi in relazione tra loro attraverso il forcing.

In questa prospettiva, il teorema di Woodin sulla completezza proiettiva sotto grandi cardinali non stabilisce una «verità assoluta» sulla struttura proiettiva: stabilisce una *proprietà di robustezza* di un certo tipo di universo — un universo con molti cardinali di Woodin ha una struttura proiettiva che è stabile rispetto al forcing. Ma esistono altri

universi (con meno grandi cardinali) in cui la struttura proiettiva varia sotto il forcing, e questi universi sono ugualmente legittimi dal punto di vista del pluralismo.

Questa posizione pluralistica ha una ricaduta diretta sulla nozione di genericità. Nel multiverso di Hamkins, non esiste «il» generico assoluto: ogni filtro generico G produce un'estensione M[G] che è uno dei molti universi del multiverso, e la genericità di G è sempre relativa a M — è M-genericità. Non c'è una genericità «assoluta» al di là di tutte le genericità relative.

Questa posizione è, in un certo senso, la conferma più radicale della tesi del settimo capitolo: la genericità è irriducibilmente relativa. Ma essa ha anche una conseguenza filosofica che può sembrare paradossale: il multiverso di Hamkins è, esso stesso, una struttura in cui ogni universo è «generico» rispetto agli altri. Il multiverso insiemistico è la forma matematica della molteplicità irriducibile delle prospettive — ogni universo è il «punto di vista» di una scelta di filtro generico, e nessun punto di vista è privilegiato rispetto agli altri.

Questa struttura risuona in modo suggestivo con la nozione badiousiana di situazione e di evento: ogni universo del multiverso è una «situazione» con la propria enciclopedia, e il forcing che produce un'estensione generica è l'analogo dell'evento che forza un'estensione generica della situazione. La differenza è che Badiou postula un universo unico (ZFC) in cui le procedure di verità operano, mentre Hamkins postula una molteplicità di universi ugualmente reali. Il dibattito tra queste due posizioni è uno dei fronti aperti più vivaci nella filosofia della matematica contemporanea, e la nozione di genericità è al suo centro.

Bibliografia

La presente bibliografia non aspira all'esaustività catalografica ma alla selezione commentata: per ciascuna opera o famiglia di opere si indica il contributo specifico alla problematica della genericità sviluppata nel trattato, i punti di entrata più proficui per chi voglia approfondire, e dove opportuno le connessioni con le altre sezioni del lavoro.

I. Topologia, Teoria della Misura e il Teorema di Baire

Baire, René-Louis. *Sur les fonctions de variables réelles.* Annali di Matematica Pura ed Applicata, serie III, 3 (1899), pp. 1–123. La tesi di dottorato originale in cui Baire introduce la nozione di insieme di prima categoria (magro) e dimostra il teorema che porta il suo nome. La lettura rimane istruttiva non soltanto per ragioni storiche: l'argomentazione originale di Baire procede con una chiarezza espositiva che molte presentazioni moderne sacrificano sull'altare della generalità. Il contesto è la teoria

delle funzioni reali, e la motivazione immediata è la caratterizzazione delle funzioni puntualmente limite di funzioni continue — un problema che Baire risolve esattamente individuando nell'insieme residuale la classe delle funzioni con questa proprietà.

Oxtoby, John C. *Measure and Category: A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces.* Springer, Graduate Texts in Mathematics 2, seconda edizione, 1980. Il trattato classico sulle relazioni — e le divergenze — tra le nozioni di «quasi tutti» nella topologia di Baire e nella teoria della misura di Lebesgue. La struttura del testo è comparativa: per ogni teorema sull'una delle due nozioni, Oxtoby presenta il teorema parallelo per l'altra, evidenziando dove l'analogia tiene e dove si rompe. La discussione dei controesempi (insiemi residuali di misura nulla, insiemi di prima categoria di misura piena) è la migliore presentazione disponibile della distinzione trattata nel paragrafo I.4 del presente trattato.

Kechris, Alexander S. *Classical Descriptive Set Theory.* Springer, Graduate Texts in Mathematics 156, 1995. Il trattato di riferimento per la teoria descriptiva degli insiemi, che studia la struttura degli insiemi definibili negli spazi polacchi (spazi metrici separabili completi). La genericità topologica nel senso di Baire è uno dei fili conduttori del testo; le connessioni con la teoria dei giochi (giochi di Banach-Mazur, determinatezza) e con la gerarchia di Borel sono sviluppate con la massima precisione tecnica. Il quinto capitolo, dedicato ai giochi e alla genericità, è particolarmente rilevante per le connessioni con il forcing.

Fremlin, David H. *Measure Theory.* 5 volumi, Torres Fremlin, 2000–2008. Disponibile liberamente sul sito dell'autore. Il trattato più completo sulla teoria della misura moderna, con ampia trattazione delle relazioni tra misura e categoria di Baire. Il secondo volume, dedicato alle algebre di misura, è rilevante per le connessioni con le algebre di Boole complete trattate nell'Appendice A.

II. Teoria degli Insiemi e Forcing

Cohen, Paul J. *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* W. A. Benjamin, 1966. Il libro in cui Cohen presenta la propria dimostrazione originale dell'indipendenza dell'ipotesi del continuo, rivolta a un pubblico di logici e matematici non necessariamente specialisti in teoria degli insiemi. La presentazione è estremamente chiara nella sua articolazione intuitiva — Cohen è eccellente nello spiegare la motivazione delle definizioni — e conserva tutto il suo valore didattico nonostante il successivo sviluppo della materia. I capitoli III e IV, dedicati all'introduzione del forcing, sono la fonte primaria per il materiale del secondo capitolo del presente trattato.

Kunen, Kenneth. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs.* North-Holland, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 102, 1980. Ristampato da College Publications, 2011. Per oltre quarant'anni il testo di riferimento standard per l'apprendimento del forcing. La presentazione del forcing per parziali ordini è quella

che ha formato intere generazioni di logici; il trattamento della c.c.c. e della preservazione dei cardinali è particolarmente rigoroso. I capitoli VI e VII sono la lettura più consigliata per chi voglia approfondire il materiale dell'Appendice A del presente trattato.

Jech, Thomas. *Set Theory*. The Third Millennium Edition, revised and expanded. Springer, 2003. L'enciclopedia della teoria degli insiemi moderna. Copre il forcing (capitoli XIV e XV), le algebre di Boole complete (capitolo XIV), l'iterazione del forcing (capitolo XVI), e gran parte della teoria degli insiemi che ha seguito i risultati di Gödel e Cohen. La trattazione è più ampia ma meno discorsiva di Kunen; è indispensabile come riferimento.

Shelah, Saharon. *Proper and Improper Forcing*. Springer, Perspectives in Mathematical Logic, seconda edizione, 1998. Il riferimento per il forcing proprio e le tecniche più avanzate. Non è accessibile senza una solida base nel forcing standard, ma contiene la teoria dell'iterazione in tutta la sua profondità. Il capitolo introduttivo, in cui Shelah discute la motivazione filosofica delle proprie scelte tecniche, è un documento raro di riflessione metamatematica da parte di un matematico di prima grandezza.

Kanamori, Akihiro. *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*. Springer, Perspectives in Mathematical Logic, seconda edizione, 2003. Il trattato sulle grandi cardinalità e le loro relazioni con la determinatezza, la teoria descrittiva, e il forcing. Il primo capitolo, dedicato alla storia della teoria degli insiemi, è la migliore sintesi storica disponibile; la discussione dell'universo costruibile di Gödel (capitolo III) è essenziale per il contesto del secondo capitolo del presente trattato.

Gödel, Kurt. *The Consistency of the Continuum Hypothesis*. Princeton University Press, Annals of Mathematics Studies 3, 1940. La monografia in cui Gödel presenta la costruzione dell'universo costruibile L e dimostra la consistenza di IC con ZFC. Notevolmente breve (74 pagine) e tecnicamente densa; la lettura con un buon commentario (ad esempio quello di Kanamori) è raccomandata.

III. Filosofia della Matematica e Ontologia Insiemistica

Badiou, Alain. *L'Être et l'événement*. Éditions du Seuil, 1988. Traduzione italiana: *L'essere e l'evento*, a cura di Gino Giometti, il melangolo, 1995. L'opera fondamentale del sistema badiousiano. Le meditazioni dedicate al forcing (dalla 33a alla 36a) sono quelle più direttamente rilevanti per il terzo capitolo del presente trattato; la 34a meditazione, «La struttura ontologica della situazione e l'assioma del vuoto», è il cuore della costruzione teorica. La traduzione italiana è scrupolosa ma presuppone familiarità con il vocabolario filosofico francese contemporaneo.

Badiou, Alain. *Court traité d'ontologie transitoire*. Éditions du Seuil, 1998. Traduzione italiana: *Breve trattato di ontologia transitoria*, a cura di Francesco Guercio, il melangolo,

2007. La raccolta di saggi in cui Badiou elabora e chiarisce i punti più tecnici dell'*Être et l'événement*, con particolare attenzione alla genericità, al forzamento, e alle quattro procedure di verità. Il saggio «Il (ri)torno della filosofia verso se stessa» contiene la più chiara articolazione della tesi di identità ontologia/ZFC; il saggio «Gödel» affronta le relazioni tra incompletezza e genericità.

Hallward, Peter. *Badiou: A Subject to Truth*. University of Minnesota Press, 2003. La più completa introduzione in inglese al sistema di Badiou, con ampia trattazione delle basi matematiche. I capitoli 5 e 6, dedicati rispettivamente alla struttura della situazione e alla teoria dell'evento, sono una lettura propedeutica eccellente per chi approcci *L'Être et l'événement* senza un'adeguata formazione in teoria degli insiemi. L'autore, pur non essendo matematico, riesce a spiegare con sufficiente precisione il forcing senza tradirne la struttura tecnica.

Norris, Christopher. *Badiou's Being and Event and the Mathematics of Set Theory*. Continuum, 2009. Una valutazione critica del rapporto tra la matematica e la filosofia nel sistema di Badiou, scritta da un filosofo analitico con solida formazione matematica. Norris è particolarmente attento ai punti in cui il sistema badiousiano eccede le risorse della matematica formale che dichiara di fondarlo, e le sue critiche — pur non sempre condivisibili nelle conclusioni — sono le più tecnicamente informate disponibili nella letteratura critica.

Hamkins, Joel David. *Lectures on the Philosophy of Mathematics*. MIT Press, 2020. Una riflessione filosofica sulla matematica scritta da uno dei maggiori specialisti mondiali di forcing e teoria degli insiemi di grandi cardinali. Il capitolo dedicato all'infinito e quello dedicato alla verità matematica sono particolarmente rilevanti per le questioni sollevate nel secondo capitolo del presente trattato; l'autore sostiene una posizione pluralista sull'universo degli insiemi — esistono molti «universi» di ZFC, non uno solo — che è filosoficamente importante per valutare le ambizioni ontologiche di Badiou.

IV. Biologia Sistematica e Nomenclatura

Linné, Carl von (Carolus Linnaeus). *Systema Naturae per Regna Tria Naturae*. Prima edizione: Lugduni Batavorum, 1735; decima edizione, definitiva per la nomenclatura zoologica: Holmiae, 1758. L'opera fondatrice della sistematica biologica moderna. La decima edizione del 1758 è quella che stabilisce la nomenclatura binomiale e introduce i tipi nomenclatoriali de facto (pur senza una teoria esplicita del tipo). L'accesso alle edizioni storiche è facilitato dalla Biodiversity Heritage Library (biodiversitylibrary.org).

International Commission on Zoological Nomenclature. *International Code of Zoological Nomenclature*. Quarta edizione, ICZN, Londra, 1999. Disponibile liberamente online. Il codice che regolamenta la nomenclatura zoologica. Gli articoli 72–75, dedicati ai tipi delle specie, e gli articoli 61–67, dedicati alla priorità nomenclatoriale, sono quelli direttamente rilevanti per il quarto capitolo del presente trattato. La lettura

del codice rivela la straordinaria complessità istituzionale e quasi-giuridica che governa la stabilità del sistema nomenclatoriale.

Turland, N. J., et al. (eds.). *International Code of Nomenclature for algae, fungi, and plants (Shenzhen Code)*. Koeltz Botanical Books, 2018. Disponibile liberamente online. Il corrispettivo botanico dell'ICZN. Le differenze tra il codice zoologico e quello botanico — in particolare la pratica botanica di designare tipi su esemplari d'erbario anziché su esemplari interi — sono filosoficamente interessanti: esse rivelano come la medesima funzione epistemologica (stabilizzare il riferimento nomenclatoriale attraverso un ancoraggio indicale) possa essere realizzata con materiali diversi.

Ereshefsky, Marc. *The Poverty of the Linnaean Hierarchy: A Philosophical Study of Biological Taxonomy*. Cambridge University Press, 2001. La più completa analisi filosofica disponibile del sistema linneano di classificazione, con ampia trattazione del problema dello statuto ontologico delle specie e della funzione del tipo nomenclatoriale. Il capitolo 6, dedicato ai tipi e al riferimento naturale, è in dialogo diretto con le teorie kripkiane della riferimento dei termini di genere naturale.

Dupré, John. *The Disorder of Things: Metaphysical Foundations of the Disunity of Science*. Harvard University Press, 1993. Una difesa del pluralismo biologico contro ogni tentativo di ridurre la classificazione biologica a un unico sistema gerarchico privilegiato. Il terzo capitolo, dedicato alle specie, mette in discussione l'esistenza di specie naturali nel senso robusto del realismo biologico, con argomenti rilevanti per la valutazione della posizione nominalista discussa nel quarto capitolo del presente trattato.

Kripke, Saul A. *Naming and Necessity*. Harvard University Press, 1980. Prima pubblicazione in *Semantics of Natural Language*, Davidson e Harman (eds.), D. Reidel, 1972. Il testo fondatore della teoria dei designatori rigidi e della designazione diretta per i termini di genere naturale. Le conferenze sulla designazione di termini come «oro», «acqua», «tigre» sono il fondamento filosofico della posizione convenzionalista-causale discussa nel paragrafo IV.4 del presente trattato.

Putnam, Hilary. «The Meaning of 'Meaning'.» In K. Gunderson (ed.), *Language, Mind and Knowledge*. Minnesota Studies in the Philosophy of Science, vol. 7, 1975, pp. 131–193. Ristampato in *Mind, Language and Reality: Philosophical Papers*, vol. 2, Cambridge University Press, 1975. Il saggio in cui Putnam introduce la divisione del lavoro linguistico e la tesi dell'«estensione esterna» per i termini di genere naturale. La discussione dell'acqua e della sua struttura molecolare è il paradigma della posizione esternalista applicata alla nomenclatura biologica.

V. Filosofia del Linguaggio e i Generic Statements

Carlson, Gregory N. *Reference to Kinds in English*. Tesi di dottorato, University of Massachusetts Amherst, 1977. Disponibile attraverso ProQuest Dissertations. La tesi

che introduce la distinzione I-level/S-level e il trattamento sistematico della quantificazione sui tipi. Carlson mostra per primo che i generici non possono essere analizzati come quantificatori universali con restrizioni, e propone la struttura tripartita che sarà sviluppata nella letteratura successiva.

Carlson, Gregory N. e Pelletier, Francis J. (eds.). *The Generic Book*. University of Chicago Press, 1995. Il volume collettaneo che consolida la ricerca sui generici fino alla metà degli anni Novanta. Contiene contributi di Carlson, Krifka, Pelletier, Lawler, Schubert e Asher, tra gli altri. Il saggio introduttivo di Carlson e Pelletier è la migliore panoramica disponibile sullo stato del problema; il contributo di Krifka e collaboratori sulla struttura tripartita dell'operatore GEN è il riferimento tecnico standard.

Leslie, Sarah-Jane. «Generics and the Structure of the Mind.» *Philosophical Perspectives* 21 (2007), pp. 375–403. Il saggio fondamentale in cui Leslie introduce la distinzione tra proprietà caratteristiche e proprietà accidentali, e sviluppa la teoria delle proprietà *striking* come fattore determinante nella valutazione dei generics. La discussione delle implicazioni per i pregiudizi e gli stereotipi sociali è la più filosoficamente elaborata disponibile nella letteratura tecnica.

Leslie, Sarah-Jane. «Generics: Cognition and Acquisition.» *Philosophical Review* 117/1 (2008), pp. 1–47. L'articolo in cui Leslie sviluppa la propria teoria degli «enunciati primitivi» (cognitively primitive generics) come forma di generalizzazione precedente alla quantificazione esplicita. La tesi è che i generics siano la forma cognitivamente primaria della generalizzazione — che la quantificazione universale e esistenziale siano astrazioni successive rispetto alla generalizzazione generica — con implicazioni importanti per la psicologia dello sviluppo e la cognizione infantile.

Nickel, Bernhard. *Between Logic and the World: An Integrated Theory of Generics*. Oxford University Press, 2016. La monografia più sistematica e recente sulla semantica e la pragmatica dei generics. Nickel difende una posizione che integra considerazioni semantiche e epistemologiche, sostenendo che i generics esprimono connessioni esplicative (explanatory connections) tra categorie e proprietà, non semplici generalizzazioni statistiche o modali. La discussione del rapporto tra generics e leggi di natura (capitolo 5) è particolarmente rilevante per il paragrafo V.8 del presente trattato.

Prasada, Sandeep e Dillingham, Elaine M. «Principled and Statistical Connections in Common Sense Conception.» *Cognition* 99/1 (2006), pp. 73–112. Un contributo dalla psicologia cognitiva che fornisce evidenza empirica per la distinzione tra generalizzazioni principled (strutturali) e statistiche, rilevante per i fondamenti cognitivi della semantica dei generics discussa nel quinto capitolo.

Szabó, Zoltán Gendler. «Scare Quotes.» *Mind and Language* 21/3 (2006), pp. 328–355. Un articolo laterale ma illuminante sulla funzione delle virgolette di distanziamento nel discorso che usa termini generici in modo non endorsato. La discussione è rilevante per le implicazioni sociali dei generics discusse nel paragrafo V.5.

VI. Teoria delle Categorie e Topos

Lawvere, F. William e Schanuel, Stephen H. *Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories*. Cambridge University Press, seconda edizione, 2009. L'introduzione più accessibile alla teoria delle categorie dal punto di vista di Lawvere, con esposizione del programma categoriale in filosofia della matematica. Adatto come punto di entrata per chi non abbia formazione in algebra moderna.

Mac Lane, Saunders e Moerdijk, Ieke. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer, Universitext, 1992. Il trattato standard di introduzione alla teoria dei topos, scritto da due dei massimi esperti. Il quinto capitolo, dedicato alle algebre di Heyting e alla logica intuizionistica nei topos, e il nono, dedicato al forcing e ai modelli di set theory nei topos, sono i più direttamente rilevanti per l'Appendice B del presente trattato. La presentazione è tecnica ma accessibile a chi abbia una buona base in algebra e topologia.

Johnstone, Peter T. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*. 2 volumi (su 3 previsti). Oxford University Press, 2002. L'enciclopedia della teoria dei topos moderna. La trattazione dei nuclei topologici (topologie di Lawvere-Tierney) nel volume I, capitolo A4, e delle connessioni con la logica nel volume II, capitolo D, sono le più complete disponibili. Non accessibile senza formazione specialistica, ma indispensabile come riferimento.

Lawvere, F. William. «Quantifiers and Sheaves.» In *Actes du Congrès International des Mathématiciens 1970*, vol. 1, pp. 329–334. Gauthier-Villars, 1971. Il saggio fondatore della teoria dei topos come fondazione della matematica, in cui Lawvere articola per la prima volta la connessione tra quantificatori logici, funtori aggiunti, e struttura dei fasci. Notevolmente breve (sei pagine) e di straordinaria densità concettuale.

Bell, John L. *Toposes and Local Set Theories: An Introduction*. Oxford Logic Guides, Oxford University Press, 1988. Una presentazione della teoria dei topos orientata alla logica e alla teoria degli insiemi locali, con enfasi sulle connessioni tra topos, logiche intuizionistiche, e modelli a valori in algebre di Heyting. Il terzo capitolo, dedicato ai modelli a valori booleani e al forcing, è il più direttamente rilevante per le connessioni tra l'Appendice A e l'Appendice B.

Caramello, Olivia. *Theories, Sites, Toposes: Relating and Studying Mathematical Theories through Topos-Theoretic 'Bridges'*. Oxford University Press, 2017. La ricerca sulla «pontisteria» (bridge theory) di Caramello: il programma di usare la teoria dei topos come linguaggio unificante per tradurre risultati tra teorie matematiche diverse attraverso la nozione di topos classificante. Questo lavoro è rilevante per la struttura di questo trattato nel suo complesso: esso mostra come la nozione di genericità — incarnata nel topos classificante — sia davvero un operatore di connessione trasversale tra domini matematici diversi.

VII. Opere di Raccordo e Sintesi Filosofica

Ferreirós, José. *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Birkhäuser, seconda edizione corretta, 2007. La storia più completa e filosoficamente informata della teoria degli insiemi, da Cantor a Cohen. I capitoli su Gödel e Cohen sono particolarmente ricchi di analisi delle motivazioni filosofiche sottostanti alle scelte tecniche.

Potter, Michael. *Set Theory and Its Philosophy: A Critical Introduction*. Oxford University Press, 2004. Una introduzione alla teoria degli insiemi che integra continuamente la presentazione tecnica con la riflessione filosofica. Il trattamento della distinzione tra insiemi e proprietà, tra estensione e intensione, e tra modelli e strutture è il più filosoficamente attento disponibile in un testo introduttivo.

Shapiro, Stewart. *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*. Oxford University Press, 1991. Un argomento per la logica del secondo ordine come fondamento della matematica, con discussione estesa delle relazioni tra struttura, categoricità, e modelli. Rilevante per la questione del rapporto tra il forcing e la struttura «reale» dell'universo degli insiemi.

Wittgenstein, Ludwig. *Ricerche filosofiche*. Traduzione italiana di Mario Trinchero, Einaudi, 1974. Prima pubblicazione in tedesco come *Philosophische Untersuchungen*, Blackwell, 1953. L'opera di riferimento per la discussione del «metro di Parigi» (§50) e del suo ruolo come campione-fondamento del sistema di misurazione, discussa nel paragrafo IV.7 del presente trattato. La sezione sulle regole (§§138–242) è rilevante per la discussione dei generics come forme di generalizzazione pre-teorica.

Maddy, Penelope. *Realism in Mathematics*. Oxford University Press, 1990; *Naturalism in Mathematics*. Oxford University Press, 1997. Due monografie sulla filosofia della matematica che affrontano la questione dell'esistenza degli oggetti matematici e del rapporto tra pratica matematica e fondamenti. La discussione degli assiomi di grandi cardinalità e della loro «plausibilità» in *Naturalism in Mathematics* è rilevante per la questione della genericità come eccedenza strutturale di ogni sistema fondazionale.

I. Forcing di Sacks, Forcing di Mathias e Gradi di Genericità

Sacks, Gerald E. «Forcing with Perfect Closed Sets.» In D. Scott (ed.), *Axiomatic Set Theory*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics vol. 13, parte I, American Mathematical Society, 1971, pp. 331–355. Il saggio originale in cui Sacks introduce il forcing con alberi perfetti e dimostra la minimalità del reale prodotto. La presentazione è molto densa ma autocontenuta; il lemma di fusione è dimostrato in modo succinto e elegante. Nonostante l'età, il saggio non è stato superato come presentazione canonica del metodo.

Mathias, Adrian R. D. «Happy Families.» *Annals of Mathematical Logic* 12 (1977), pp. 59–111. L'articolo fondamentale sul forcing di Mathias, che introduce le condizioni (s, A) e dimostra la proprietà di Ramsey-genericità del reale prodotto. Il titolo fa riferimento alle «famiglie felici» — i sottoinsiemi infiniti omogenei — che il reale di Mathias produce. Il contesto storico è quello della logica di Ramsey e dei giochi infiniti; Mathias era a Cambridge e la costruzione fu influenzata dal lavoro di Nash-Williams sulle ramificazioni infinite.

Laver, Richard. «On the Consistency of Borel's Conjecture.» *Acta Mathematica* 137 (1976), pp. 151–169. L'articolo che introduce il forcing di Laver per dimostrare la consistenza della congettura di Borel (ogni insieme di reali di misura nulla è fortemente di misura nulla). La costruzione dell'albero di Laver — con ogni nodo che ha ω successori — è più ricca di quella di Sacks, e il reale prodotto domina ogni funzione del modello di base pur essendo minimale in grado di Turing.

Judah, Haim (Jaime I. Ihoda) e Shelah, Saharon. «Sacks Forcing, Laver Forcing, and Martin's Axiom.» *Archive for Mathematical Logic* 28 (1989), pp. 247–280. Un confronto tecnico dettagliato tra le proprietà delle diverse nozioni di forcing, con enfasi sulle relazioni con l'assioma di Martin. La discussione delle «proprietà di preservazione» — quali proprietà del modello di base sono preservate dal forcing — è la più sistematica disponibile per questi tipi di forcing.

Brendle, Jörg. «Amoeba-Absoluteness and Projective Measurability.» *Journal of Symbolic Logic* 58/4 (1993), pp. 1284–1290. Un articolo tecnico che studia le relazioni tra la misurabilità proiettiva e vari tipi di forcing, incluso il forcing di Sacks. Rilevante per la connessione con il teorema di Solovay discusso nell'ottavo capitolo.

Zapletal, Jindřich. *Forcing Ideals*. Cambridge University Press, 2008. Un trattato sistematico che organizza la teoria del forcing attraverso la nozione di *ideale* di insiemi eccezionali — esattamente la struttura identificata nel settimo capitolo per spiegare la molteplicità delle nozioni di genericità. Ogni tipo di forcing corrisponde a un ideale; le proprietà del reale generico corrispondono alle proprietà dell'ideale. Il trattato fornisce il quadro più coerente e unificato disponibile per la molteplicità delle genericità.

II. Grandi Cardinali, il Modello di Solovay, e la Determinatezza

Solovay, Robert M. «A Model of Set Theory in Which Every Set of Reals is Lebesgue Measurable.» *Annals of Mathematics* 92 (1970), pp. 1–56. L'articolo originale in cui Solovay costruisce il modello in cui ogni insieme di reali è Lebesgue-misurabile, usando il collasso di un cardinale inaccessibile. L'articolo è rimasto, per oltre cinquant'anni, uno dei risultati più citati della teoria degli insiemi, e il suo stile — che combina tecnica di forcing, teoria della misura, e argomenti combinatori — è ancora esemplare.

Shelah, Saharon. «Can You Take Solovay's Inaccessible Away?» *Israel Journal of Mathematics* 48 (1984), pp. 1–47. L'articolo in cui Shelah dimostra che l'inaccessibilità è necessaria per la Lebesgue-misurabilità di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ (per le funzioni Σ^1_2-reale). La dimostrazione usa tecniche di forcing e di teoria della misura di grande raffinatezza; il titolo allude direttamente al teorema di Solovay che si propone di completare stabilendone la necessità.

Martin, Donald A. e Steel, John R. «A Proof of Projective Determinacy.» *Journal of the American Mathematical Society* 2/1 (1989), pp. 71–125. Il risultato fondamentale sulla determinatezza proiettiva sotto l'ipotesi di cardinali di Woodin. La dimostrazione è lunga e tecnica; la lettura è facilitata dagli articoli introduttivi di Neeman (vedi sotto) e dai capitoli finali di Kanamori *The Higher Infinite*.

Neeman, Itay. «Determinacy in L($\mathbb{R}$).» In *Handbook of Set Theory*, M. Foreman e A. Kanamori (eds.), Springer, 2010, pp. 1877–1950. Una presentazione moderna e dettagliata della teoria della determinatezza e dei suoi rapporti con i grandi cardinali, inclusa la determinatezza di L($\mathbb{R}$) sotto l'ipotesi di infiniti cardinali di Woodin. Accessibile ai lettori con una buona conoscenza del forcing.

Woodin, W. Hugh. *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal*. De Gruyter, 1999. La monografia fondamentale del programma di Woodin sulla struttura dell'universo degli insiemi sotto ipotesi di grandi cardinali. La dimostrazione che la teoria proiettiva è completa e invariante per forcing sotto infiniti cardinali di Woodin è il risultato centrale. Non accessibile senza formazione specialistica nella teoria degli insiemi avanzata.

Woodin, W. Hugh. «The Continuum Hypothesis, Part I e Part II.» *Notices of the American Mathematical Society* 48/6 (2001), pp. 567–576 e 48/7 (2001), pp. 681–690. Una presentazione accessibile (per matematici non specialisti) del programma di Woodin per risolvere l'ipotesi del continuo sotto grandi cardinali. La posizione di Woodin — che IC sia falsa e $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ — è argomentata con grande chiarezza; gli articoli costituiscono il migliore punto di entrata al programma di Woodin per lettori filosoficamente orientati.

Hamkins, Joel David. «The Set-Theoretic Multiverse.» *Review of Symbolic Logic* 5/3 (2012), pp. 416–449. Il manifesto del pluralismo insiemistico di Hamkins. L'articolo presenta in forma accessibile la posizione secondo cui tutti i modelli di ZFC sono ugualmente «reali», e risponde alle obiezioni più comuni. La discussione del rapporto tra il multiverso e la nozione di genericità è quella più direttamente rilevante per il presente trattato.

Kanamori, Akihiro. «Large Cardinals with Forcing.» In *Handbook of the History of Logic*, vol. 6, D. Gabbay, A. Kanamori, J. Woods (eds.), Elsevier, 2012, pp. 359–414. Una storia tecnica dell'interazione tra grandi cardinali e forcing, dalla dimostrazione di Cohen al programma di Woodin. Utile come panoramica storica e come guida alla letteratura.

III. Vaghezza, Logica e Indeterminatezza

Williamson, Timothy. *Vagueness.* Routledge, 1994. Il trattato fondamentale della posizione epistemica sulla vaghezza. Williamson costruisce un argomento dettagliato per la tesi che ogni predicato vago ha un confine netto non conoscibile, usando come strumento principale la condizione di sicurezza per la conoscenza. I capitoli 7 e 8, dedicati rispettivamente alla conoscenza e all'epistemica della vaghezza, sono quelli più rilevanti per la connessione con la genericità discussa nel nono capitolo.

Williamson, Timothy. *Knowledge and Its Limits.* Oxford University Press, 2000. La monografia sulla teoria della conoscenza che sviluppa e approfondisce gli strumenti epistemici già presenti in *Vagueness*. Il capitolo sulla chiusura della conoscenza e sul margine per errore è direttamente rilevante per la connessione tra epistemismo della vaghezza e struttura del forcing discussa nel paragrafo IX.8.

Fine, Kit. «Vagueness, Truth and Logic.» *Synthese* 30/3–4 (1975), pp. 265–300. Il saggio fondamentale della teoria supervalutazionista della vaghezza. Fine introduce la nozione di precisificazione, la semantica della superverità, e la logica supervalutazionista con grande precisione tecnica. Ancora oggi il riferimento principale per l'approccio supervalutazionista.

Keefe, Rosanna. *Theories of Vagueness.* Cambridge University Press, 2000. Una rassegna critica sistematica delle principali teorie della vaghezza — epistemica, a molti valori, supervalutazionista, contestualista — con valutazione comparativa dei loro meriti e difficoltà. Un buon punto di entrata per i lettori non specialisti.

Sorensen, Roy. *Vagueness and Contradiction.* Oxford University Press, 2001. Una difesa dell'epistemismo della vaghezza alternativa a quella di Williamson, con enfasi sulle connessioni tra vaghezza, paradossi logici, e struttura del pensiero ordinario. La discussione del sorite come paradosso di conoscenza — piuttosto che come paradosso semantico o logico — è complementare alla trattazione di Williamson.

Smith, Nicholas J. J. *Vagueness and Degrees of Truth.* Oxford University Press, 2008. La difesa più sistematica e aggiornata delle teorie a gradi di verità (fuzzy logic applicata alla vaghezza). Smith risponde alle principali obiezioni alla logica a molti valori, incluso il problema della higher-order vagueness, con argomenti tecnici dettagliati. Rilevante per la connessione tra logica a molti valori e algebre di Heyting discussa nell'Appendice A.

MacFarlane, John. *Assessment Sensitivity: Relative Truth and Its Applications.* Oxford University Press, 2014. La presentazione più sistematica della teoria relativista della verità applicata alla vaghezza (e ad altri fenomeni linguistici come il gusto, i modali epistemici, e i futuri contingenti). La teoria di MacFarlane è tecnicamente raffinata e ha connessioni interessanti con la semantica a mondi possibili indicizzata al contesto di valutazione.

Schiffer, Stephen. *The Things We Mean.* Oxford University Press, 2003. Una trattazione del significato che include una discussione della vaghezza come fenomeno

irreducibile del linguaggio naturale, non eliminabile attraverso precisificazioni o gradi di verità. La posizione di Schiffer — il «nihilismo» sulla vaghezza — è filosoficamente provocatoria e rilevante per la discussione dell'indeterminatezza strutturale del nono capitolo.

IV. Fenomenologia, Variazione Eidetica e Strutture dell'Esperienza

Husserl, Edmund. *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie, Erstes Buch*. Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung, 1913. Traduzione italiana: *Idee per una fenomenologia pura e per una filosofia fenomenologica*, vol. I, trad. di Enrico Filippini, Einaudi, 1965. Il testo fondamentale della fenomenologia trascendentale, in cui Husserl introduce la riduzione fenomenologica e la nozione di intuizione eidetica. I §§3–4 («Riflessioni metodologiche generali» e «Intuizione eidetica») sono i più direttamente rilevanti per il decimo capitolo.

Husserl, Edmund. *Erfahrung und Urteil: Untersuchungen zur Genealogie der Logik*. Claassen, 1939 (postumo, a cura di Ludwig Landgrebe). Traduzione italiana: *Esperienza e giudizio: ricerche sulla genealogia della logica*, trad. di Filippo Costa e Leonardo Samonà, Bompiani, 1995. La presentazione più sistematica e matura della variazione eidetica, nel contesto di una genealogia della logica che risale dalle operazioni logiche alla vita pre-predicativa della coscienza. La parte terza («La legalità eidetica e le sue fonti nell'esperienza»), in particolare i §§87–93, è la fonte principale per le considerazioni del decimo capitolo.

Husserl, Edmund. *Cartesianische Meditationen und Pariser Vorträge*. Husserliana I, Martinus Nijhoff, 1950. Traduzione italiana: *Meditazioni cartesiane*, trad. di Filippo Costa, Bompiani, 1960. Le meditazioni contengono la presentazione più accessibile della fenomenologia trascendentale, con ampia discussione della costituzione intersoggettiva dei tipi e delle essenze. La quinta meditazione, dedicata all'intersoggettività, è rilevante per la distinzione tra tipo cognitivo (husserliano) e tipo nomenclatoriale (linneano) discussa nel paragrafo X.5.

Moran, Dermot. *Introduction to Phenomenology*. Routledge, 2000. Un'eccellente introduzione critica alla tradizione fenomenologica da Brentano a Derrida, con capitoli dettagliati su Husserl, Heidegger, Sartre, Merleau-Ponty, e Gadamer. Il capitolo su Husserl (cap. 2) tratta con chiarezza la variazione eidetica e il suo rapporto con la nozione di essenza e tipo.

Zahavi, Dan. *Husserl's Phenomenology*. Stanford University Press, 2003. Una introduzione concisa ma filosifcamente accurata al pensiero di Husserl, con enfasi sui temi della coscienza, dell'intenzionalità, e della costituzione trascendentale. Il capitolo sulla riduzione e sull'intuizione eidetica è il più equilibrato disponibile come punto di entrata.

Smith, Barry e Woodruff Smith, David (eds.). *The Cambridge Companion to Husserl.* Cambridge University Press, 1995. Un volume collettaneo con contributi dei maggiori husserl-ologi, che copre tutti gli aspetti principali del pensiero husserliano. Il saggio di Ronald McIntyre e David Woodruff Smith sull'intenzionalità e il saggio di J. N. Mohanty sulla logica di Husserl sono quelli più direttamente rilevanti per la connessione con la semantica formale discussa nel decimo capitolo.

Wittgenstein, Ludwig. *Philosophische Untersuchungen / Philosophical Investigations.* Trad. inglese di G. E. M. Anscombe, P. M. S. Hacker e Joachim Schulte, Wiley-Blackwell, quarta edizione, 2009. I §§65–67 sulla nozione di «somiglianza di famiglia» (Familienähnlichkeit) sono il contrappunto wittgensteiniano alla teoria husserliana dei tipi essenziali: invece di un'essenza invariante che accomuna tutti i casi del tipo, Wittgenstein propone una rete di sovrapposizioni parziali senza invariante comune. La discussione del §50 sul metro di Parigi (già citata nel quarto capitolo) è il punto di connessione con la nozione di tipo nomenclatoriale.

Smith, Barry. «Husserl, Logic, and the Philosophy of Mathematics.» *Philosophia Mathematica* 1 (1981), pp. 3–44. Un'analisi del rapporto tra la logica formale husserliana e la fenomenologia dei tipi matematici. Smith mostra come la nozione husserliana di «pluralità manifold» (Mannigfaltigkeit) — l'analogo husserliano di una struttura algebrica — sia connessa alla nozione di tipo eidetico attraverso la variazione libera, e come questa connessione anticipi in parte le strutture che la teoria delle categorie avrebbe esplicitato con maggiore precisione.

Rota, Gian Carlo. «The Phenomenology of Mathematical Beauty.» *Synthese* 111/2 (1997), pp. 171–182. Un saggio di un grande matematico (allievo di Doob e collaboratore di Birkhoff) sulla fenomenologia dell'esperienza matematica. Rota, influenzato dall'husserlismo attraverso la mediazione di Merleau-Ponty, descrive la percezione dell'eleganza matematica come un'intuizione eidetica sui tipi di struttura — una «variazione eidetica» implicita che riconosce l'invariante attraverso molte presentazioni diverse. Rilevante per la connessione tra la variazione husserliana e la pratica matematica effettiva.